PRELIMINARI

DI UNA

TEORIA GEOMETRICA

DELLE

SUPERFICIE.

PEL

D.r LUIGI CREMONA,

Professore di Geometria Superiore nella R. Università di Bologna.

BOLOGNA,
TIPI GAMBERINI E PARMEGGIANI.
1866.

« Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria. »
PHAEDRI *Fabulæ*, III. 17.

La benevola accoglienza fatta da questa Accademia e dagli studiosi della geometria all' *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (*) mi ha animato a tentare l' impresa analoga per la geometria dello spazio a tre dimensioni. Naturalmente la materia è qui molto più complessa ed il campo senza paragone più vasto; onde m' è uopo chiedere venia delle lacune e delle sviste, che pur troppo avverrà al lettore d' incontrare, nè lievi nè rade.

Primo concetto di questo lavoro è stato quello di dimostrare col metodo sintetico le più essenziali proposizioni di alta geometria che appartengono alla teoria delle superficie d' ordine qualunque, e sono esposte analiticamente o appena enunciate nelle opere e nelle memorie di SALMON, CAYLEY, CHASLES, STEINER, CLEBSCH, ... (**); e di connetterle o completarle in qualche parte coi risul-

(*) Memorie dell' Accademia di Bologna, t. 12 (prima serie), 1862. All' *Introduzione* fanno seguito alcune brevi memorie inserite negli Annali di matematica (pubblicati a Roma dal prof. TORTOLINI), cioè: *Sulla teoria delle coniche* (t. 5, p. 330) — *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (t. 6, p. 153) — *Sulla teoria delle coniche* (t. 6, p. 179). Dell' *Introduzione* e di queste aggiunte è stata fatta una traduzione tedesca dal sig. CURTZE professore a Thorn (*Einleitung in eine geometrische Theorie der ebnen Curven*, Greifswald 1865).

(**) Mi sono giovato inoltre dei lavori di MONGE, DUPIN, PONCELET, JACOBI, PLÜCKER, HESSE, GRASSMANN, KUMMER, SCHLAEFLI, STAUDT, JONQUIÈRES, LA GOURNERIE, BELLAVITIS, SCHRÖTER, AUGUST, PAINVIN, BISCHOFF, BATTAGLINI, SCHWARZ, FIEDLER, ecc. ecc.

tati delle mie proprie ricerche. Ma per dare una forma decorosa allo scritto, e per renderlo accessibile ai giovani, ho dovuto convincermi ch' era conveniente allargare il disegno e farvi entrare alcune nozioni introduttive che senza dubbio i dotti giudicheranno troppo note ed elementari. Per contrario io spero che coloro i quali incominciano lo studio della geometria descrittiva, vi troveranno le dottrine che attualmente costituiscono lo stromento più efficace per addentrarsi in quella scienza.

PARTE PRIMA.

Coni.

1. Cono è il luogo di una retta (generatrice) che si muova intorno ad un punto fisso o vertice v secondo una legge data, p. e. incontrando sempre una data linea.

Un cono dicesi dell' ordine n se un piano condotto ad arbitrio pel vertice lo taglia secondo n rette generatrici (reali, imaginarie, distinte, coincidenti).

Un cono dell' ordine n è incontrato da una retta arbitraria in n punti, ed è tagliato da un piano arbitrario secondo una linea dell' ordine n.

Un cono di primo ordine è un piano.

2. Se una retta R incontra un cono in due punti μ, μ' infinitamente vicini, dicesi tangente al cono in μ. Ogni piano condotto per R sega il cono secondo una curva tangente ad R nello stesso punto μ. Viceversa, se R tocca una sezione del cono, essa è tangente anche al cono.

Il piano condotto per v e per la tangente R conterrà due rette generatrici $v\mu$, $v\mu'$ infinitamente vicine; quindi le rette tangenti al cono nei diversi punti di una stessa retta generatrice $v\mu$ giacciono tutte in un medesimo piano. Questo piano dicesi tangente al cono, e la retta $v\mu$ generatrice di contatto.

Come due generatrici successive $v\mu$, $v\mu'$ sono situate nel piano che è tangente lungo $v\mu$, così due piani tangenti successivi (lungo $v\mu$ e $v\mu'$) si segheranno secondo la generatrice $v\mu'$. Dunque il cono può essere considerato e come luogo di rette (generatrici) e come inviluppo di piani (tangenti).

Classe di un cono è il numero de' suoi piani tangenti passanti per un punto preso ad arbitrio nello spazio, ossia per una retta condotta arbitrariamente pel vertice. Un cono di prima classe è una retta, cioè un fascio di piani passanti per una retta.

Se si sega il cono con un piano qualunque, si otterrà una curva o sezione, i cui punti e le cui tangenti saranno le tracce delle generatrici e dei piani tangenti del cono. Questa curva è adunque, non solamente del medesimo ordine, ma anche della medesima classe del cono.

3. Alle singolarità della curva corrisponderanno altrettante singolarità del cono e viceversa. Chiamiamo doppie (nodali o coniugate), triple, ..., cuspidali o stazionarie o di regresso le generatrici che corrispondono ai punti doppi, tripli, ... e alle cuspidi della sezione; piani bitangenti, tritangenti, ..., stazionari quei piani passanti per v le cui tracce sono le tangenti doppie, triple, ..., stazionarie della sezione. Una

generatrice doppia sarà l' intersezione di due falde della superficie (reali o imaginarie); e quando queste siano toccate da uno stesso piano, la generatrice diviene cuspidale. Un piano bitangente tocca il cono lungo due generatrici distinte; un piano stazionario lo tocca lungo due generatrici consecutive, cioè lo sega secondo tre generatrici consecutive (inflessione); ecc.

Siano n l' ordine ed
m la classe del cono;
δ il numero delle generatrici doppie,
$\varkappa$ » » cuspidali,
τ » dei piani bitangenti,
ι » » stazionari.

Siccome questi medesimi numeri esprimono le analoghe singolarità della curva piana, così avranno luogo per essi le formole di Plücker (*)

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\varkappa,$$
$$n = m(m-1) - 2\tau - 3\iota,$$
$$\iota = 3n(n-2) - 6\delta - 8\varkappa,$$
$$\varkappa = 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota,$$

una qualunque delle quali è conseguenza delle altre tre.

4. Le proprietà dei coni e in generale delle figure composte di rette e piani passanti per un punto fisso (vertice) si possono dedurre da quelle delle curve piane e delle figure composte di punti e rette, tracciate in un piano fisso, sia per mezzo della projezione o prospettiva, sia in virtù del principio di dualità. In quest' ultimo caso ai punti ed alle rette della figura piana corrispondono ordinatamente i piani e le rette della figura conica.

Aggiungiamo qui alcuni enunciati dedotti dalla teoria delle curve piane, nei quali le rette e i piani s' intenderanno passanti per uno stesso punto fisso, vertice comune di tutti i coni che si verranno menzionando.

Due coni d' ordini n, n' e di classi m, m', hanno nn' generatrici comuni ed mm' piani tangenti comuni. Se i due coni hanno lungo una generatrice comune lo stesso piano tangente, essi avranno inoltre $nn'-2$ generatrici ed $mm'-2$ piani tangenti comuni.

Un cono d' ordine o di classe n (il cui vertice sia dato) è determinato da $\frac{n(n+3)}{2}$ condizioni. Per $\frac{n(n+3)}{2}$ rette date ad arbitrio passa un solo cono d' ordine n; ed $\frac{n(n+3)}{2}$ piani dati ad arbitrio toccano un solo cono di classe n. Per le generatrici comuni a due coni d' ordine n passano infiniti altri coni dello stesso ordine, formanti un complesso che si chiama f a s c i o

(*) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, 99, 100.

di coni d' ordine n. Un cono d' ordine n non può avere più di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ generatrici doppie (comprese le stazionarie) senza decomporsi in coni d' ordine inferiore; ecc.

Un piano condotto ad arbitrio per una retta fissa segherà un cono dato d' ordine n secondo n generatrici; allora il luogo degli assi armonici (*) di grado r del sistema delle n generatrici rispetto alla retta fissa sarà un cono d' ordine r che può essere denominato cono polare $(n-r)^{mo}$ della retta fissa (retta polare) rispetto al cono dato (cono fondamentale). Per tal modo una retta dà origine ad $n-1$ coni polari i cui ordini sono $n-1$, $n-2$, .. 2, 1. L' ultimo cono polare è un piano. Se il cono polare $(r)^{mo}$ di una retta passa per un' altra retta, viceversa il cono polare $(n-r)^{mo}$ di questa passa per la prima. I coni polari di una generatrice del cono fondamentale sono tangenti a questo lungo la generatrice medesima. I coni polari d' ordine $n-1$ delle rette di un piano fisso formano un fascio. Le rette che sono generatrici doppie di coni polari d' ordine $n-1$ formano un cono (Hessiano) d' ordine $3(n-2)$ che sega il cono fondamentale lungo le generatrici d' inflessione di questo; ecc. (**).

5. Un cono di second' ordine è anche di seconda classe, e viceversa. La teoria di questi coni (coni quàdrici) è una conseguenza immediata di quella delle coniche (***).

Un cono quadrico può essere generato e come luogo della retta intersezione di due piani corrispondenti in due fasci projettivi di piani (s' intenda sempre passanti per uno stesso punto fisso), e come inviluppo del piano passante per due raggi corrispondenti in due stelle projettive (situate in piani diversi, ma aventi lo stesso centro). Viceversa, in un cono quadrico, i piani che passano per una stessa generatrice variabile e rispettivamente per due generatrici fisse, generano due fasci projettivi; ed un piano tangente variabile sega due piani tangenti fissi secondo rette formanti due stelle projettive (****).

Rispetto ad un cono quadrico fondamentale, ogni retta ha il suo piano polare, e viceversa ogni piano ha la sua retta polare. Se una retta si muove in un piano fisso, il piano polare di quella ruota intorno alla retta polare del piano fisso, e viceversa.

Chiamansi coniugate due rette tali che l' una giaccia nel piano polare dell' altra; e coniugati due piani ciascun de' quali contenga la retta polare dell' altro. Due rette coniugate formano sistema armonico colle generatrici del cono fondamentale contenute nel loro piano; e l' angolo di due piani coniugati è diviso armonicamente dai piani tangenti al cono che passano per la retta comune a quelli.

Un triedro dicesi coniugato ad un cono quadrico quando ciascuno spigolo di quello ha per piano polare la faccia opposta. Due triedri coniugati ad un cono sono inscritti in un altro cono e circoscritti ad un terzo cono.

(*) *Introd.* 19, 68.
(**) *Introd.* art. XIII e XV.
(***) *Introd.* art. XI e XVIII.
(****) Chasles *Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré* (Nouveaux Mémoires de l' Acad. de Bruxelles, t. 6; 1830).

Se un cono è circoscritto ad un triedro coniugato ad un altro cono, viceversa questo è inscritto in un triedro coniugato al primo cono. Due coni hanno un triedro coniugato comune, le cui facce sono i piani diagonali del tetraedro completo formato dai piani tangenti comuni ai due coni, ed i cui spigoli sono le intersezioni delle coppie di piani opposti che passano per le generatrici comuni ai due coni medesimi; ecc.

Un cono di second' ordine avente una retta doppia è il sistema di due piani passanti per quella retta. Un cono di seconda classe avente un piano bitangente è il sistema di due rette poste in quel piano.

I coni quadrici soggetti a tre condizioni comuni, tali che ciascun cono sia determinato in modo unico da due rette, formano un complesso che può chiamarsi rete. In una rete di coni quadrici, ve ne sono infiniti che si decompongono in coppie di piani, ossia che sono dotati di una retta doppia; l' inviluppo di questi piani è un cono di terza classe e il luogo delle rette doppie è un cono di terz' ordine; ecc. (*).

Sviluppabili e curve gobbe.

6. Consideriamo una curva come il luogo di tutte le posizioni di un punto che si muova continuamente nello spazio secondo una tal legge che un piano arbitrario non contenga che un sistema discreto di posizioni del mobile (**). La curva è gobba quando quattro punti qualisivogliano di essa non siano in uno stesso piano.

La curva dicesi dell' ordine n quando un piano arbitrario la incontra in n punti (reali, imaginari, distinti, coincidenti). Segue da questa definizione che una curva gobba è almeno del terz' ordine.

La retta che unisce il punto μ della curva al punto consecutivo μ' (infinitamente vicino) dicesi tangente alla curva in μ. Ogni piano passante per la retta $\mu\mu'$ dicesi anch' esso tangente alla curva in μ, e non può incontrare altrove la curva in più di $n-2$ punti.

Classe di una curva gobba è il numero de' suoi piani tangenti che passano per una retta arbitraria, ossia il numero delle sue rette tangenti incontrate dalla retta arbitraria.

Siano μ, μ', μ'', μ'''.... punti consecutivi (infinitamente vicini) della curva. Le rette tangenti consecutive $\mu\mu'$, $\mu'\mu''$ hanno il punto comune μ', e determinano un piano $\mu\mu'\mu''$ che, avendo un contatto tripunto colla curva, dicesi osculatore in μ. Due piani osculatori consecutivi $\mu\mu'\mu''$, $\mu'\mu''\mu'''$ si segano secondo la tangente $\mu'\mu''$, e tre piani osculatori consecutivi $\mu\mu'\mu''$, $\mu'\mu''\mu'''$, $\mu''\mu'''\mu''''$ si segano nel punto μ'' della curva.

Ossia: un punto della curva è determinato da due tangenti consecutive

---

(*) A scanso d' equivoci ripeto che negli enunciati di questo numero come in quelli del precedente, i coni de' quali si fa parola hanno lo stesso vertice, pel quale passano tutte le rette e tutt' i piani ivi considerati.

(**) Cioè in modo che tutte le successive posizioni del punto mobile dipendano dalla variazione di un solo parametro; onde una curva potrà dirsi una serie semplicemente infinita di punti.

o da tre piani osculatori consecutivi; una tangente è determinata da due punti consecutivi o da due piani osculatori consecutivi; ed un piano osculatore è determinato da tre punti consecutivi o da due tangenti consecutive.

7. Dicesi sviluppabile il luogo delle tangenti alla curva; le tangenti sono le generatrici della sviluppabile. Ordine della sviluppabile è il numero de' punti in cui essa è incontrata da una retta arbitraria, epperò questo numero è eguale alla classe della curva. Il piano $\mu\mu'\mu''$, osculatore alla curva in μ, dicesi tangente alla sviluppabile lungo la generatrice $\mu\mu'$, perchè contiene le due generatrici consecutive $\mu\mu'$, $\mu'\mu''$, onde ogni retta condotta nel piano è tangente alla sviluppabile (cioè la incontra in due punti infinitamente vicini) in un punto della generatrice di contatto $\mu\mu'$; e reciprocamente ogni retta tangente alla sviluppabile in un punto di questa generatrice è situata nel detto piano. Come ogni piano tangente della sviluppabile contiene due generatrici consecutive, così ciascuna generatrice è situata in due piani tangenti consecutivi; dunque la sviluppabile è ad un tempo il luogo delle tangenti della curva e l' inviluppo dei piani osculatori della medesima.

Abbiamo dedotto la nozione di sviluppabile da quella di curva, ma possiamo invece ricavare la curva dalla sviluppabile. Imaginiamo un piano che si muova continuamente nello spazio, secondo una tal legge che per un punto arbitrariamente preso non passi che un sistema discreto di posizioni del piano mobile (*). L' inviluppo delle posizioni del piano mobile, ossia il luogo della retta secondo la quale si segano due posizioni successive di quello, è ciò che si chiama una sviluppabile (**).

Siano π, π', π'', π'''.... posizioni successive del piano mobile. Il piano π' contiene le due rette consecutive $\pi\pi'$, $\pi'\pi''$. I tre piani consecutivi π, π', π'' si segheranno in un punto, luogo del quale sarà una certa curva situata nella sviluppabile. Il punto $\pi\pi'\pi''$ giace nelle due generatrici consecutive $\pi\pi'$, $\pi'\pi''$, e viceversa la generatrice $\pi'\pi''$ contiene i due punti consecutivi $\pi\pi'\pi''$, $\pi'\pi''\pi'''$ della curva; dunque le generatrici della sviluppabile sono tangenti alla curva. Il piano π'' contiene i tre punti consecutivi $\pi\pi'\pi''$, $\pi'\pi''\pi'''$, $\pi''\pi'''\pi''''$; dunque i piani tangenti della sviluppabile sono osculatori alla curva.

Classe della sviluppabile è il numero de' suoi piani tangenti che passano per un punto arbitrario dello spazio.

8. Quando il punto generatore della curva passa due volte per una medesima posizione, in questa s' incroceranno due rami (reali o imaginari) formando un punto doppio (nodo o punto coniugato). S' indichino con a e b le due posizioni del mobile che sovrapponendosi formano il punto doppio; con a', a'',... i punti consecutivi ad a nel primo ramo, e con b', b'',... i punti consecutivi a b nel secondo ramo della curva. Saranno aa', bb' le rette tangenti ed $aa'a''$, $bb'b''$ i piani osculatori ai due rami nel punto doppio.

(*) Cioè in modo che tutte le posizioni del piano mobile dipendano dalla variazione di un solo parametro; onde una sviluppabile è una serie semplicemente infinita di piani. I coni ne costituiscono un caso particolare.

(**) Monge *Application de l' analyse à la géométrie* § XII.

il quale tien luogo di quattro intersezioni della curva con ciascuno de' piani osculatori anzidetti e col piano delle due tangenti; di tre intersezioni con ogni altro piano che passi per una delle due tangenti; e di due sole con qualunque altro piano passante pel punto medesimo.

Quando le due tangenti (epperò anche i due piani osculatori) coincidono, si ha una cuspide, che dicesi anche punto stazionario, perchè ivi si segano tre tangenti consecutive (*) ossia quattro piani osculatori consecutivi.

Analogamente si potrebbero considerare punti tripli, quadrupli, ..., ne' quali le tangenti siano distinte, ovvero tutte o in parte coincidenti; ecc.

Come la curva può avere punti singolari, così la sviluppabile potrà essere dotata di piani tangenti singolari. Un piano dicesi bitangente quando tocca la sviluppabile lungo due generatrici distinte, ossia oscula la curva in due punti distinti; stazionario quando tocca la sviluppabile lungo due generatrici consecutive, ossia ha un contatto quadripunto colla curva; ecc.

La curva e la superficie possono avere altre singolarità più elevate che per ora non si vogliono considerare.

9. Seghiamo la sviluppabile con un piano P; la sezione che ne risulta sarà una curva dello stesso ordine della sviluppabile; i punti della quale saranno le tracce delle generatrici, e le tangenti le tracce dei piani tangenti, perchè, come si è già osservato, ogni retta condotta in un piano tangente alla sviluppabile è tangente a questa medesima. Ne segue che anche la classe della sezione coinciderà colla classe della sviluppabile: infatti le tangenti che le si possono condurre da un punto qualunque del suo piano sono le tracce dei piani che dallo stesso punto vanno a toccare la sviluppabile. Le tangenti doppie della sezione saranno (oltre le tracce dei piani bitangenti) quelle rette del piano P per le quali passano due piani tangenti; e le tangenti stazionarie saranno le tracce dei piani stazionari.

Ogni punto μ della curva gobba (le cui tangenti sono le generatrici della sviluppabile) situato nel piano P sarà una cuspide per la sezione; infatti, essendo quel punto l' intersezione di tre piani tangenti consecutivi, in esso si segheranno tre tangenti consecutive della sezione. A cagione di questa proprietà si dà alla curva gobba il nome di spigolo di regresso o curva cuspidale della sviluppabile. Viceversa dicesi sviluppabile osculatrice di una curva gobba l' inviluppo dei suoi piani osculatori.

Le rette condotte ad arbitrio pel punto μ nel piano P incontrano ivi la sezione in due punti coincidenti; ma vi è una retta, la tangente cuspidale (cioè la traccia del piano osculatore alla curva gobba in μ), per la quale il punto μ rappresenta tre intersezioni riunite. Dunque una retta condotta ad arbitrio per un punto della curva cuspidale incontra ivi la sviluppabile in due punti coincidenti; ma fra quelle rette ve ne sono infinite per le quali quel punto rappresenta un contatto tripunto, ed il luogo delle medesime è il piano che in quel punto oscula la curva.

Se due generatrici non consecutive si segano sul piano P, il punto d' in-

---

(*) *Introd.* 30.

contro sarà un punto doppio per la sezione, perchè questa sarà ivi toccata dalle tracce dei due piani che toccano la sviluppabile lungo quelle generatrici. Queste tracce sono le sole rette che in quel punto abbiano un contatto tripunto colla sezione, mentre ogni altra retta condotta nel piano P per lo stesso punto incontrerà ivi la sezione medesima in due punti coincidenti. Tutti i punti analoghi, intersezioni di due generatrici non consecutive, formano sulla sviluppabile una curva che, a cagione della proprietà or notata, chiamasi la curva doppia o la curva nodale della sviluppabile. La tangente alla curva doppia in un suo punto qualunque è evidentemente la retta intersezione dei due piani che in quel punto toccano la sviluppabile.

Dunque una retta condotta ad arbitrio per un punto della curva doppia incontra ivi la sviluppabile in due punti coincidenti; ma fra le rette analoghe ve ne sono infinite per le quali quel punto rappresenta tre intersezioni riunite, e il luogo di esse è costituito dai due piani che toccano la sviluppabile lungo le generatrici incrociate in quel medesimo punto.

Invece, come già si è notato, le rette che toccano la sviluppabile in un punto ordinario sono tutte situate in un solo piano (il piano tangente lungo l' unica generatrice cha passa per quel punto) ed hanno colla sviluppabile un contatto bipunto.

10. Siano ora

n l' ordine della curva gobba data,

m la classe della sviluppabile osculatrice,

r l' ordine di questa sviluppabile ossia la classe della curva gobba;

g il numero delle rette situate in un piano P (qualsivoglia) per ciascuna delle quali passano due piani tangenti della sviluppabile; aggiuntovi il numero dei piani bitangenti, se ve ne sono;

x il numero dei punti del piano P per ciascuno de' quali passano due generatrici della sviluppabile, ossia l' ordine della curva doppia; ed

α il numero dei piani stazionari.

Allora la sezione fatta dal piano P nella sviluppabile sarà una curva d' ordine r, di classe m, dotata di x punti doppi, n cuspidi, g tangenti doppie ed α inflessioni; dunque, in virtù delle formole di Plücker, avremo:

$$\begin{aligned} m &= r(r-1) - 2x - 3n, \\ r &= m(m-1) - 2g - 3\alpha, \\ \alpha &= 3r(r-2) - 6x - 8n, \\ n &= 3m(m-2) - 6g - 8\alpha. \end{aligned}$$

11. Si assuma un punto arbitrario o dello spazio come vertice di un cono passante per la data curva gobba (cono prospettivo). Le generatrici di questo cono saranno le rette che dal punto o vanno ai punti della curva, ed i piani tangenti del cono saranno i piani passanti pel vertice e per le tangenti della curva. Un piano condotto per o segherà il cono secondo tante generatrici quanti sono i punti della curva situati nello stesso piano; dunque l' ordine del cono è eguale all' ordine della curva. Per un punto qualunque o' dello spazio passeranno tanti piani tangenti del cono quante sono le tangenti della curva incontrate dalla retta oo'; dunque la classe del cono è eguale alla classe della curva ossia all' ordine della sviluppabile osculatrice.

Saranno generatrici doppie del cono le rette congiungenti il punto o ai punti doppi della curva ed anche le rette passanti per o ed appoggiate in due punti distinti alla curva, perchè in entrambi i casi il cono avrà due piani tangenti lungo una stessa generatrice. Saranno poi generatrici cuspidali del cono le rette congiungenti il vertice o alle cuspidi della curva.

Se un piano passante per o è osculatore alla curva, esso sarà stazionario pel cono, perchè ne contiene tre generatrici consecutive. Condotta ad arbitrio per o una retta nel piano stazionario, questo conta per due fra gli r piani che passano per la retta e toccano il cono; ma vi è una retta, la generatrice di contatto del piano stazionario, per la quale questo piano conterà per tre (*). Dunque se in un piano osculatore della curva conduciamo una retta arbitraria, fra i piani che per questa si possono condurre a toccare la curva il piano osculatore conta per due: ma vi sono infinite rette per le quali il piano osculatore conta per tre, e tutte queste rette passano pel punto di osculazione.

Se un piano passante per o tocca la curva in due punti distinti μ, ν, esso toccherà il cono lungo due generatrici $o\mu$, $o\nu$, epperò sarà un piano bitangente del cono. Il piano bitangente conta per due fra i piani che toccano il cono e passano per una retta condotta ad arbitrio per o nello stesso piano bitangente; conta invece per tre, se la retta è una delle due generatrici di contatto. Dunque, se in un piano bitangente della curva gobba si tira una retta arbitraria, quel piano conta per due fra i piani che passano per questa retta e toccano la curva; ma conta per tre per le infinite rette che si possono condurre nel detto piano per l' uno o per l' altro de' punti di contatto.

Tutti i piani analoghi, ciascun de' quali tocca la curva gobba in due punti ossia contiene due tangenti non consecutive, inviluppano (7) una sviluppabile che dicesi doppiamente circoscritta o bitangente alla curva. Uno qualunque di quei piani tocca questa sviluppabile secondo la retta che unisce i due punti di contatto di quel piano colla curva data.

12. Se adunque si indica con

h il numero delle rette che da un punto (arbitrario) o si possono condurre a incontrare due volte la curva gobba data, aggiuntovi il numero de' punti doppi di questa: o in altre parole il numero de' punti doppi apparenti ed attuali della curva;

y il numero dei piani che passano per o e contengono due tangenti non consecutive della curva, ossia la classe della sviluppabile bitangente; e con

β il numero delle cuspidi della curva;

il cono prospettivo di vertice o sarà dell'ordine n, della classe r, ed avrà h generatrici doppie, β generatrici stazionarie, y piani bitangenti ed m piani stazionari. Dunque avremo (3)

$$\begin{aligned} r &= n\,(n-1) - 2h - 3\beta\,, \\ n &= r\,(r-1) - 2y - 3m\,, \\ m &= 3n\,(n-2) - 6h - 8\beta\,, \\ \beta &= 3r\,(r-2) - 6y - 8m\,. \end{aligned}$$

(*) Il che si ricava dalle analoghe proprietà delle curve piane, *Introd.* 31.

Le sei equazioni che precedono sono dovute al sig. Cayley (*). Per mezzo di esse, o di altre che se ne possono dedurre, come p. e. le seguenti

$$\alpha - \beta = 2(m - n),$$
$$x - y = m - n,$$
$$2(g - h) = (m - n)(m + n - 7),$$

ogniqualvolta si conoscano tre delle nove quantità

$$n, m, r, \alpha, \beta, g, h, x, y,$$

si potranno determinare le altre sei.

Le cose qui esposte mostrano che lo studio delle curve gobbe non può essere disgiunto da quello delle sviluppabili. Si può dire che una sviluppabile colla sua curva cuspidale forma un sistema unico nel quale sono a considerare punti (i punti della curva), rette (le tangenti della curva ossia le generatrici della sviluppabile) e piani (i piani tangenti della sviluppabile). Del resto, come le proprietà dei coni si ricavano col principio di dualità da quelle delle curve piane, così lo stesso principio serve a mettere in correlazione le curve gobbe e le sviluppabili (che non siano coni), ossia a dedurre dalle proprietà di un sistema le cui caratteristiche siano

$$n, m, r, \alpha, \beta, g, h, x, y,$$

quelle del sistema (reciproco) avente le caratteristiche

$$m, n, r, \beta, \alpha, h, g, y, x.$$

13. Abbiamo veduto come si determinano le caratteristiche del cono prospettivo alla curva gobba e di una sezione della sviluppabile, quando il vertice del cono ed il piano segante sono affatto arbitrari. In modo analogo si procederebbe se quel punto o quel piano avessero una posizione particolare. Diamo qui alcuni esempi.

Se il piano segante passa per una retta τ del sistema, la sezione sarà composta di questa e di una curva d'ordine $r-1$. La classe di questa curva sarà m come nel caso generale; ed $n-2$ il numero delle cuspidi perchè il piano segante, essendo tangente alla curva cuspidale, la incontrerà in altri $n-2$ punti. Le formole di Plücker c' insegnano poi che la curva-sezione ha $\alpha+1$ flessi, $g-1$ tangenti doppie ed $x-r+4$ punti doppi. Abbiamo un flesso di più che nel caso generale, e questo nuovo flesso è il punto μ ove la retta τ tocca la curva cuspidale. Che in μ la retta τ tocchi la curva-sezione risulta da ciò che μ dev' essere una cuspide per la sezione completa. Siccome poi τ è l' intersezione di due piani consecutivi del sistema, così per un punto qualunque di τ non passano che $m-2$ tangenti della curva-sezione, e per μ non ne passano che $m-3$ (oltre a τ); dunque τ è una tangente stazionaria per la curva medesima. Nel caso attuale la sezione non ha che $x-r+4$ punti doppi, mentre la curva doppia deve avere x punti nel piano segante; gli altri $r-4$ punti saranno le intersezioni della retta τ colla curva-sezione; dunque una generatrice qualunque di una sviluppabile d' ordine r incontra altre $r-4$ generatrici non consecutive.

(*) *Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables* (G. di Liouville, t. 10; 1845).

Se il piano tangente è uno dei piani π del sistema, la sezione sarà composta di una retta τ (la generatrice di contatto del piano π colla sviluppabile) contata due volte e di una curva il cui ordine sarà $r - 2$. Per un punto qualunque del piano passeranno altri $m - 1$ piani del sistema, dunque la sezione è della classe $m - 1$. Il piano oscula la curva cuspidale e la sega in altri $n - 3$ punti; dunque la sezione avrà $n - 3$ cuspidi. Dalle formole di Plücker si ricava poi che questa curva possiede α flessi, $g - m + 2$ tangenti doppie ed $x - 2r + 8$ punti doppi. Nel caso che si considera, il punto μ, in cui il piano π oscula la curva cuspidale, non è più un flesso per la curva-sezione, ma un punto di semplice contatto colla retta τ; perchè ora il numerò $m - 2$ delle tangenti che da un punto di τ si possono condurre (oltre a τ) alla curva non è inferiore che di un' unità alla classe di questa. La sezione ha $x - 2r + 8$ punti doppi; altri $r - 4$ punti della curva doppia sono le intersezioni della retta τ colla curva-sezione, ma ciascun di essi conta come due punti doppi della sezione completa, perchè questa comprende in sè due volte la retta τ. Dunque in questi $r - 4$ punti la curva doppia è toccata dal piano π. Ossia, ogni piano del sistema contiene $r - 4$ tangenti della curva doppia, e i punti di contatto sono nella retta del sistema, posta in quel piano (*).

Se il piano segante π è uno de' piani stazionari del sistema, la retta τ rappresenta nella sezione tre rette coincidenti, onde avremo inoltre una curva d' ordine $r - 3$. Questa sarà della classe $m - 2$, perchè un piano stazionario rappresenta due piani consecutivi del sistema, onde per ogni punto di esso non passeranno che $m - 2$ altri piani. Il piano π, avendo un contatto quadripunto colla curva cuspidale, la segherà in altri $n - 4$ punti, cioè la curva-sezione avrà $n - 4$ cuspidi. Dalle formole di Plücker si ha poi che questa curva possiede $\alpha - 1$ flessi, $g + 2n - 6$ tangenti doppie ed $x - 3r + 13$ punti doppi. La medesima curva è incontrata dalla retta τ, che la tocca nel punto μ, in altri $r - 5$ punti, ciascun de' quali conta tre volte fra i punti doppi della sezione completa, perchè la retta τ conta come tre rette in questa sezione. Dunque ciascun piano stazionario oscula la curva doppia in $r - 5$ punti, situati nella retta del sistema che è in quel piano. Anche il punto μ appartiene alla curva doppia, perchè in esso si segano tre rette consecutive del sistema, sicchè, riguardato come intersezione della prima colla terza tangente, quel punto dee giacere nella curva doppia. In questo punto la curva doppia è toccata del piano π, come risulta da un' osservazione fatta superiormente. Dunque i punti in cui la curva cuspidale è toccata dai piani stazionari appartengono anche alla curva doppia, la quale è ivi toccata dai piani medesimi (**).

(*) Ciò risulta anche dall' osservazione che in un suo punto qualunque la curva doppia ha per tangente la retta comune ai due piani che in quel punto toccano la sviluppabile. Donde si scorge inoltre che le $r - 4$ tangenti menzionate della curva doppia sono anche tangenti alla curva-sezione d' ordine $r - 2$.

(**) Vi sono altri punti comuni alla curva cuspidale ed alla curva doppia, oltre ai punti ove la prima è osculata dai piani stazionari. I punti stazionari della curva cuspidale sono situati anche nella curva doppia, perchè in ciascun di quelli si segano tre rette consecutive del sistema. Inoltre se la tangente alla curva cuspidale in un punto va ad incontrare la stessa curva in un altro punto non consecutivo, questo sarà un punto stazionario della curva doppia, perchè in esso due rette consecutive del sistema sono segate da una terza retta non consecutiva.

Analogamente possiamo determinare le caratteristiche dei coni prospettivi, ovvero possiamo dedurle dalle precedenti per mezzo del principio di dualità. Ci limiteremo ad enunciare i risultati.

Se il vertice è preso sopra una retta del sistema, il cono prospettivo è dell' ordine n, della classe $r-1$, ha $m-2$ generatrici di flesso, $\beta+1$ generatrici cuspidali, $y-r+4$ piani bitangenti ed $h-1$ generatrici doppie. Donde si vede che una tangente della data curva gobba è una generatrice cuspidale pel cono prospettivo che ha il vertice in un punto di quella retta.

Se il vertice è un punto del sistema, il cono prospettivo è dell' ordine $n-1$, della classe $r-2$, ha $m-3$ generatrici di flesso, β generatrici cuspidali, $y-2r+8$ piani bitangenti ed $h-m+2$ generatrici doppie. Di qui s' inferisce che in un punto qualunque della data curva gobba s' incrociano $r-4$ generatrici della sviluppabile bitangente, e i relativi piani tangenti passano per la retta che in quel punto tocca la curva data. Quelle $r-4$ generatrici sono anche situate nel cono prospettivo che ha il vertice nel punto che si considera.

Se il vertice è un punto stazionario (*) del sistema, il cono prospettivo è dell' ordine $n-2$, della classe $r-3$, ha $m-4$ generatrici di flesso, $\beta-1$ generatrici cuspidali, $y-3r+13$ piani bitangenti ed $h-2m+6$ generatrici doppie. Quindi si trova che una cuspide della curva gobba data è un punto multiplo secondo il numero $r-5$ per lo spigolo di regresso della sviluppabile bitangente e i corrispondenti $r-5$ piani tangenti di questa sviluppabile passano per la tangente cuspidale della curva data. Questa sviluppabile è toccata anche dai piani osculatori della curva data nelle cuspidi.

14. Per dare un esempio, supponiamo di avere una sviluppabile della classe m, i cui piani tangenti corrispondano projettivamente, ciascuno a ciascuno, ai punti di una retta A. Di quale ordine sarà questa sviluppabile? Assunta una retta arbitraria R, per un punto qualunque o di essa passeranno m piani tangenti, ai quali corrisponderà un gruppo di m punti θ in A. Viceversa, assunto un punto θ in A, a questo corrisponderà un piano tangente che segherà R in un punto o; e gli altri $m-1$ piani tangenti passanti per o determineranno gli altri $m-1$ punti del gruppo in A. Ne segue che variando il punto o in R, il gruppo dei punti θ genererà in A un' involuzione di grado m, projettiva alla semplice punteggiata formata dai punti o (**). Quell' involuzione ha $2(m-1)$ punti doppi; cioè $2(m-1)$ gruppi ciascun de' quali contiene due punti θ coincidenti. Ad uno qualunque di questi gruppi corrisponderà in R un punto pel quale due degli m piani tangenti coincideranno, cioè un punto che apparterrà o ad un piano stazionario, o all' intersezione di due piani tangenti consecutivi cioè alla sviluppabile. Avremo dunque

$$r=2(m-1)-\alpha.$$

Poi dalle formole di Cayley si trae

$$n=3(m-2)-2\alpha,$$
$$\beta=4(m-3)-3\alpha,$$

(*) Se il vertice è un punto $(r)^{plo}$ della curva, il cono prospettivo è dell' ordine $n-r$, perchè ogni piano per quel punto incontrerà la curva solamente in altri $n-r$ punti.

(**) *Introd.* 21.

$$g = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \alpha,$$

$$h = \frac{1}{2}(9m^2 - 53m + 80) - 2\alpha(3m - \alpha - 9),$$

$$x = 2(m-2)(m-3) - \frac{\alpha}{2}(4m - \alpha - 11),$$

$$y = 2(m-1)(m-3) - \frac{\alpha}{2}(4m - \alpha - 7) \dots (*).$$

Superficie d' ordine qualunque.

15. Consideriamo una superficie qualsivoglia come il luogo di tutte le posizioni di un punto che si muova continuamente nello spazio, secondo una tal legge che una retta arbitraria contenga un sistema discreto di posizioni del mobile (**).

La superficie dicesi dell' ordine n quando una retta arbitraria la incontra in n punti (reali, imaginari, distinti, coincidenti). Onde se una retta ha più di n punti comuni con una superficie d' ordine n, la retta giace per intero nella superficie.

Una superficie di primo ordine è un piano.

Un piano sega una superficie d' ordine n secondo una linea dello stesso ordine n.

Una retta dicesi tangente ad una superficie se la incontra in due punti infinitamente vicini (contatto bipunto); osculatrice se la incontra in tre o più punti consecutivi (contatto tripunto, ...).

16. Per un punto μ di una data superficie si conducano due rette R, R' che ivi siano tangenti alla superficie. Il piano RR' taglierà la superficie secondo una linea L che in μ ha un contatto bipunto sì con R che con R'; dunque μ è un punto doppio per la linea L (***). Quindi tutte le rette condotte per μ nel piano RR' avranno ivi un contatto bipunto con L, cioè saranno tangenti alla superficie. Fra quelle rette ve ne sono due (le tangenti

---

(*) Salmon *On the classification of curves of double curvature* (Cambridge and Dublin Math. Journal t. 5, 1850). Veggasi inoltre l' eccellente *Treatise on the analytic geometry of three dimensions* (2 ed. Dublin 1865 dello stesso autore, ovvero l' edizione tedesca che ne ha fatta il prof. Fiedler con ricche aggiunte (*Analytische Geometrie des Raumes*, Leipzig 1863-65).

(**) Cioè in modo che tutte le successive posizioni del punto mobile corrispondano alle variazioni di due parametri indipendenti. Una superficie è dunque una serie doppiamente infinita di punti. E i punti comuni a due superficie formeranno una serie semplicemente infinita cioè una curva (6).

(***) *Introd.* 31.

ai due rami di L) che hanno in μ un contatto tripunto con L e quindi anche colla superficie. Si chiameranno le rette osculatrici nel punto μ (*). Ogni piano condotto per una di queste rette taglierà la superficie secondo una curva avente un contatto tripunto in μ colla retta stessa, vale a dire una curva avente il punto μ per flesso e la retta per tangente stazionaria.

Le due rette osculatrici sono reali o imaginarie secondochè μ sia per L un vero nodo o un punto coniugato. Nel primo caso μ dicesi punto iperbolico, nel secondo punto ellittico. Se μ è una cuspide per la curva L, le due rette osculatrici coincidono in una sola, e μ dicesi punto parabolico (**).

In generale, tutte le rette tangenti alla superficie nel punto μ giacciono nel piano RR', cioè una retta condotta per μ fuori di questo piano ha ivi in generale un solo punto comune colla superficie (***). Ma se altrimenti fosse per una retta così fatta R'', lo stesso avrebbe luogo per qualunque altra retta R''' passante per μ. In fatti, se R'' ha in μ un contatto bipunto colla superficie, il piano $R''R'''$ segherà questa secondo una linea toccata in μ da R'' e dalla intersezione de' due piani $R''R'''$, RR', epperò anche da R'''; dunque, in quell' ipotesi, tutte le rette condotte per μ avrebbero ivi un contatto bipunto colla superficie, e tutti i piani per μ segherebbero la superficie secondo una curva avente in μ un punto doppio. La qual cosa non può verificarsi che per punti singolari della superficie.

Il piano RR', nel quale sono contenute tutte le rette che toccano la superficie in un punto ordinario μ, dicesi piano tangente alla superficie in μ. Dunque un piano tangente ad una superficie in un punto qualunque taglia questa secondo una linea avente due rami (reali o no) incrociati nel punto di contatto (†).

Si può anche dire che il piano tangente alla superficie in μ è il luogo delle rette che toccano ivi le curve tracciate sulla superficie.

Classe della superficie è il numero dei piani tangenti che le si possono condurre per una retta data ad arbitrio nello spazio.

17. Quando tre rette (non situate in uno stesso piano) e per conseguenza tutte le rette passanti per μ incontrano ivi la superficie in due punti coincidenti, il punto μ dicesi doppio per la superficie medesima. Ogni piano condotto per esso sega la superficie secondo una curva avente ivi un punto doppio; le tangenti ai due rami hanno colla curva un contatto tripunto; perciò vi sono infinite rette che hanno nel punto doppio μ un contatto tripunto colla superficie, e il luogo delle medesime è un cono di second' ordine (1). Ogni piano tangente a questo cono segherà la superficie data secondo una curva cuspidata in μ. Dimostreremo in seguito esservi sei generatrici di questo cono, ciascuna delle quali ha in μ un contatto quadripunto colla superficie.

(*) *Inflexional tangents* secondo SALMON. Se la superficie contiene una retta, questa sarà una delle osculatrici per ciascuno de' suoi punti.

(**) In una sviluppabile (compresi i coni) tutti i punti sono parabolici. Le rette osculatrici coincidono colle generatrici.

(***) DUPIN *Développements de géométrie* (Paris 1813) p. 59.

(†) PLÜCKER *Ueber die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben* (G. di Crelle, t. 4; 1829) p. 359.

Può avvenire che il cono si decomponga in due piani P, Q; in tal caso le rette osculatrici sono quelle che passano per μ e giacciono in P o in Q. I piani passanti per la retta PQ segano la superficie secondo curve per le quali μ è una cuspide. La sezione fatta da ciascuno de' piani P, Q è una curva avente un punto triplo in μ; il che si fa evidente considerando che ogni retta passante per μ e situata nel piano incontra la superficie epperò la curva in tre punti riuniti in μ. Le tangenti ai tre rami sono altrettante rette aventi un contatto quadripunto in μ colla superficie.

Può anche darsi che i piani P, Q coincidano in uno solo: il quale in tal caso è l' unico che seghi la superficie secondo una curva con punto triplo in μ. Ogni piano per μ dà allora una curva cuspidata nel punto stesso.

Per distinguere queste tre sorta di punto doppio si sogliono chiamare punto conico, punto biplanare, punto uniplanare (*).

Si possono anche distinguere ulteriori varietà del punto biplanare (secondochè una o due o tre delle rette aventi contatto quadripunto coincidano colla retta comune ai due piani tangenti) e del punto uniplanare (secondochè le tre rette aventi contatto quadripunto sono distinte ovvero coincidenti) (**).

18. La superficie può avere punti tripli, quadrupli, ... multipli secondo un numero qualunque. Un punto μ si dirà $(r)^{plo}$ quando una retta qualunque condotta per μ incontri ivi la superficie in r punti coincidenti. Ogni piano passante per μ segherà allora la superficie secondo una curva avente in μ un punto $(r)^{plo}$, e le tangenti agli r rami avranno ivi colla superficie un contatto $(r+1)^{punto}$. Vi sono dunque infinite rette aventi colle superficie un contatto $(r+1)^{punto}$ in μ, e il loro luogo è un cono d' ordine r. Si dimostrerà in seguito che $r(r+1)$ generatrici di questo cono hanno colla superficie un contatto $(r+2)^{punto}$. Il cono può in certi casi decomporsi in coni d' ordine inferiore od anche in r piani, distinti o coincidenti, e così dar luogo a molte specie di punto $(r)^{plo}$.

Una superficie però non avrà mai un punto multiplo, il cui grado di moltiplicità superi l' ordine di quella. Perchè in tal caso ogni retta condotta per quel punto avrebbe in comune colla superficie più punti di quanti ne comporti l' ordine, epperò giacerebbe per intero sulla superficie.

Se una superficie d' ordine n ha un punto $(n)^{plo}$ o, essa è necessariamente un cono di vertice o. In fatti la retta congiungente o ad un altro punto qualunque della superficie, avendo con questa $n+1$ punti comuni, giace per intero nella medesima (***).

(*) Il vertice di un cono di second'ordine, un punto qualunque della curva doppia ed un punto qualunque della curva cuspidale di una sviluppabile sono esempi di queste tre sorta di punti doppi.

(**) Schlaefli *On the distribution of surfaces of the third order into species* (Phil. Trans. 1863) p. 198.

(***) Quale è il numero delle condizioni che determinano una superficie d' ordine n? Sia x_{r-1} il numero delle condizioni da sodisfarsi perchè la superficie abbia un punto $(r-1)^{plo}$ μ. Le rette che hanno in μ un contatto $(r)^{punto}$ formano un cono d' ordine $r-1$ il quale è individuato da $\frac{(r-1)(r+2)}{2}$ generatrici; onde, se si obbliga la superficie ad avere un contatto $(r)^{punto}$ in μ con $\frac{(r-1)(r+2)}{2}+1$

Una superficie può altresì avere linee multiple, cioè linee tutti i punti delle quali siano punti multipli (*). P. e. abbiamo già veduto che una sviluppabile ha in generale una curva doppia ed una curva cuspidale. Se una superficie ha una curva $(r)^{pla}$ d' ordine n ed una curva cuspidale d' ordine n', la sezione fatta nella superficie da un piano qualunque avrà n punti $(r)^{pli}$ ed n' cuspidi. Una superficie d' ordine n (che non sia il complesso di più superficie d' ordine inferiore) non può avere una curva doppia il cui ordine superi $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, perchè una linea piana non può avere più di questo numero di punti doppi senza decomporsi in linee d'ordine minore (**).

Se un cono ha, oltre al suo vertice o, un altro punto δ multiplo secondo r, tutta la retta $o\delta$ è multipla secondo r. Ciò si fa manifesto osservando che la sezione fatta con un piano condotto ad arbitrio per $o\delta$ deve avere un punto $(r)^{plo}$ in δ, e d' altronde deve constare di rette tutte concorrenti in o; onde r di queste rette coincideranno in $o\delta$.

19. Abbiamo veduto che il piano tangente ad una superficie in un punto ordinario taglia la superficie secondo una curva che ha un punto doppio nel punto di contatto. Reciprocamente, se un piano taglia la superficie secondo una curva che abbia un punto doppio μ e se questo non è un punto doppio della superficie (***), quel piano sarà ad essa tangente in μ, perchè tutte le

---

rette condotte arbitrariamente per μ (non allogate sopra un cono d' ordine $r-1$), o diverrà un punto $(r)^{plo}$. Donde segue che $x_r = x_{r-1} + \frac{(r-1)(r+2)}{2} + 1$, cioè $x_r = \frac{r(r+1)(r+2)}{2.3}$. Ma se una superficie d'ordine n ha un punto $(n)^{plo}$, essa è un cono, il quale, dato il vertice, sarà determinato da $\frac{n(n+3)}{2}$ condizioni. Dunque il numero delle condizioni che determinano una superficie d' ordine n è $\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3} + \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(n^2+6n+11)}{2.3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - 1$ (numero che d' ora in avanti indicheremo col simbolo $N(n)$). E in fatti $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}$ è appunto il numero de' coefficienti in un polinomio completo del grado n fra tre variabili.

(*) Una linea è multipla secondo il numero r quando lungo la medesima s' intersecann r falde della superficie, epperò questa avrà in ogni punto della linea multipla r piani tangenti; cioè il luogo delle rette che in quel punto hanno un contatto $(r+1)^{punto}$ colla superficie sarà formato da r piani. P. e. se la superficie (supposta d'ordine n) ha una retta doppia R, ciascun punto di questa sarà un punto biplanare. In fatti un piano P, condotto ad arbitrio per R, sega la superficie secondo una curva d' ordine $n-2$ che avrà $n-2$ punti comuni con R; sia a uno di essi. Ogni retta tirata per a in P ha ivi tre punti coincidenti comuni colla superficie; dunque il cono osculatore in a si decompone in due piani, uno de' quali è P. Condotto per a un piano qualunque E, esso taglierà la superficie secondo una curva che avrà un punto doppio in a; una delle relative tangenti sarà la retta PE; l' altra determinerà con R il secondo piano P' tangente alla superficie in a. I piani P, P' sono connessi tra loro in modo che a ciascuna posizione dell' uno corrispondono $n-2$ posizioni dell' altro; dunque avranno luogo $2(n-2)$ coincidenze di P con P' (*Introd.* 83), cioè nella retta doppia vi sono $2(n-2)$ punti uniplanari.

(**) *Introd.* 35.

(***) P. e. un piano passante per una generatrice di una sviluppabile d' ordine r taglia questa secondo quella retta ed una curva d' ordine $r-1$ che è osculata dalla retta in un punto e segata in altri $r-4$ punti. Ma essi non sono veri punti di contatto; il primo appartiene alla curva cuspidale, e gli altri alla curva doppia.

rette condotte per μ nel piano hanno ivi un contatto bipunto colla curva epperò colla superficie.

Ma ha luogo un teorema più generale. Se due superficie qualunque hanno un punto comune μ ed ivi lo stesso piano tangente, cioè se l e d u e s u p e r f i c i e s i t o c c a n o n e l p u n t o μ, qualunque piano passante per questo punto segherà le due superficie secondo due linee toccantisi in μ; dunque questo piano avrà in μ un contatto bipunto colla curva intersezione delle due superficie. Ciò equivale a dire che questa curva ha in μ un punto doppio (*). Il comune piano tangente sega entrambe le superficie secondo linee che hanno un punto doppio in μ; perciò esso ha ivi un contatto quadripunto colla curva d' intersezione delle due superficie. In questo piano sono situate le tangenti ai due rami della curva, le quali sono le rette per ciascuna delle quali facendo passare un piano segante, la curva ha con esso un contatto tripunto in μ, cioè le sezioni delle due superficie si osculano in questo punto. Se le due tangenti coincidono, cioè se la curva ha una cuspide nel punto μ, le due superficie diconsi avere un c o n t a t t o s t a z i o n a r i o.

Se vi fosse una terza retta (per μ, nel piano tangente) tale che i piani passanti per essa tagliassero le due superficie secondo linee osculantisi fra loro, la curva intersezione delle due superficie avrebbe in μ un punto triplo; epperò ogni piano per μ avrebbe ivi un contatto tripunto colla curva, cioè taglierebbe le due superficie secondo linee osculantisi fra loro. In tal caso si dice che l e d u e s u p e r f i c i e s i o s c u l a n o i n μ (**). Le quali avranno in comune le due rette osculatrici in μ; e il piano tangente, segandole entrambe secondo linee aventi un punto doppio in μ colle stesse tangenti, avrà ivi un contatto sipunto colla curva intersezione delle due superficie. Le tangenti ai tre rami di questa curva saranno le rette per le quali passano i piani che segano le superficie secondo linee aventi in μ un contatto quadripunto.

20. Due superficie i cui ordini siano n, n' sono segate da un piano arbitrario secondo due curve che hanno nn' punti comuni; dunque le due superficie si intersecano secondo una curva d' ordine nn' (***). La retta tan-

---

(*) Viceversa, se la curva comune a due superficie ha un punto doppio, che non sia doppio nè per l' una nè per l' altra superficie, in quel punto le due superficie si toccano.

(**) In generale, si dice che due superficie hanno un contatto d' ordine r in un punto μ quando un piano qualunque passante per μ le sega secondo due curve aventi ivi un contatto $(r+1)^{punto}$. La curva intersezione delle due superficie avrà in μ un punto $(r+1)^{plo}$ (Plücker l. c. p. 351). Si vede facilmente che, se una superficie deve avere con un' altra data un contatto d' ordine r in un punto dato, ciò equivale a doverla far passare per $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ punti (infinitamente vicini).

(***) Per la curva d'ordine n^2, intersezione di due superficie d' ordine n, passano infinite altre superficie dello stesso ordine. Ciò si dimostra osservando, sia che ha luogo l'analoga proprietà per le curve risultanti dal segare le due superficie date con un piano arbitrario; sia che, se $U=0$, $V=0$ sono le equazioni di queste superficie, l' equazione $U+\lambda V=0$ rappresenta per ogni valore del parametro λ una superficie passante per tutt' i punti comuni alle due date.

Abbiamo dimostrato altrove (18) che una superficie d' ordine n è determinata da $N(n)$ condizioni. Per $N(n)$ punti dati ad arbitrio nello spazio passerà dunque una superficie d' ordine n, ed una sola, perchè, se per quei punti passassero due superficie di quest' ordine, in virtù della proprietà notata dianzi, se ne potrebbero descrivere infinite altre.

Per $N(n)-1$ punti dati si potranno descrivere infinite superficie d' ordine n; due delle quali si segheranno lungo una curva d' ordine n^2 (passante per quei punti), e per questa curva passeranno infinite altre superficie dello stesso ordine, cioè tutte quelle che contengono i punti dati; dunque :

gente a questa curva in un suo punto qualunque, dovendo toccare ivi entrambe le superficie, sarà l' intersezione dei piani che nel medesimo punto toccano le due superficie. I punti doppi della curva, ove non siano punti doppi per alcuna delle superficie, saranno punti di contatto fra le medesime. Quando le due superficie si segano secondo due curve distinte, ogni punto comune a queste sarà un punto di contatto fra le superficie.

Se un punto comune a due superficie è $(r)^{plo}$ per l' una ed $(r')^{plo}$ per l' altra, sarà multiplo secondo rr' per la curva ad esse comune. Infatti un piano condotto ad arbitrio per quel punto sega le due superficie secondo due linee che, avendo ivi rispettivamente r ed r' rami incrociati, vi si segheranno in rr' punti coincidenti. Se il punto comune fosse $(r)^{plo}$ per entrambe le superficie e queste avessero ivi lo stesso cono osculatore (il luogo delle rette che incontrano la superficie in $r+1$ punti consecutivi), le due linee-sezioni avrebbero il punto $(r)^{plo}$ e le r tangenti comuni, cioè r^2+r punti coincidenti

---

Tutte le superficie d'ordine n che passano per $N(n)-1$ punti dati ad arbitrio si segano secondo una stessa curva d'ordine n^2; ossia $N(n)-1$ punti dati ad arbitrio determinano una curva d'ordine n^2, per la quale passano infinite superficie d'ordine n. Plücker *Recherches sur les surfaces algéb. de tous les degrés* (Annales de Math. de Gergonne, t. 19, 1828-29).

Il complesso di tutte le superficie d'ordine n passanti per una stessa curva d'ordine n^2 dicesi fascio d'ordine n. Per un punto dato ad arbitrio nello spazio passa una (una sola) superficie del fascio. Viceversa, se un complesso di superficie d'ordine n, soggette ad $N(n)-1$ condizioni comuni, è tale che per un punto qualunque dello spazio passi una sola di quelle superficie, la curva comune a due di esse sarà comune a tutte, epperò quel complesso sarà un fascio. La retta tangente alla curva-base del fascio (curva comune alle superficie del fascio) in un suo punto qualunque sarà situata nel piano tangente a ciascuna delle superficie; dunque i piani che toccano le superficie d'un fascio in uno stesso punto t della curva-base passano per una medesima retta T, cioè formano un fascio di piani. Come ad ogni superficie del fascio corrisponde un piano tangente, così viceversa ad ogni piano per la retta T corrisponde una superficie del fascio, la quale sarà la superficie che passa per un punto del piano, infinitamente vicino a t ma esterno a T. Diremo adunque che il fascio di superficie ed il fascio de' piani tangenti sono projettivi, e chiameremo rapporto anarmonico di quattro superficie del fascio il rapporto anarmonico de' quattro piani tangenti in un punto qualunque della curva-base. Due fasci di superficie poi si diranno projettivi quando il fascio de' piani tangenti in un punto della curva-base del primo sia projettivo al fascio dei piani tangenti in un punto della curva-base del secondo, ossia quando le superficie di ciascun fascio corrispondano, ciascuna a ciascuna, alle superficie dell' altro.

Un fascio di superficie è evidentemente segato da un piano arbitrario secondo curve formanti un fascio.

È poi facile trovare il numero de' punti che determinano la curva d'ordine $n_1 n_2$, intersezione di due superficie d'ordini n_1, n_2, ove sia $n_1 > n_2$. Le due superficie siano F_1, F_2; e sia F una superficie arbitraria d'ordine $n_1 - n_2$. La curva d'ordine n^2, nella quale la superficie F_1 sega il sistema delle due superficie F_2F sarà la base d'un fascio d'ordine n_1, onde per essa e per un punto preso ad arbitrio nello spazio si potrà far passare una nuova superficie d'ordine n_1. Ora F, essendo arbitraria, può sodisfare ad $N(n_1-n_2)$ condizioni; dunque per la curva F_1F_2 e per $N(n_1-n_2)+1$ punti arbitrari si potrà far passare una superficie d'ordine n_1. Ma una superficie di quest' ordine è individuata da $N(n_1)$ punti; dunque tutte le superficie d'ordine n_1 che passano per $N(n_1)-N(n_1-n_2)-1$ punti arbitrari della curva d'ordine n_1n_2 la contengono per intero, cioè questa curva è individuata da quel numero di punti. Jacobi *De relationibus, quæ locum habere debent inter puncta intersectionis etc.* (G. di Crelle t. 15; 1836).

P. e. una curva piana d'ordine n è determinata da $\frac{n(n+3)}{2}$ punti; una curva intersezione di una quadrica con una superficie d'ordine n è determinata da $n(n+2)$ punti; una curva intersezione di una cubica (superficie di terz'ordine) con una superficie d'ordine n è determinata da $\frac{3n(n+1)}{2}$ punti; ecc.

comuni; epperò quel punto sarebbe multiplo secondo $r(r+1)$ per la curva comune alle due superficie.

Se due superficie si toccano, si osculano, ... lungo una linea (cioè in tutti i punti di una linea), questa dee contarsi due, tre, ... volte nell' intersezione completa. Ciò si fa evidente osservando che un piano trasversale qualunque sega le due superficie secondo curve che avranno fra loro tanti contatti bipunti, tripunti, ... quant' è l' ordine di quella linea.

Se una linea è multipla secondo r per una superficie e secondo r' per l' altra, essa si dovrà calcolare rr' volte nella intersezione delle due superficie.

21. Ammesso come evidente che il numero dei punti in cui una curva d' ordine n è incontrata da una superficie d' ordine n' non dipenda che dai numeri n, n', si può concludere che la superficie incontra la curva in nn' punti, perchè questo sarebbe il numero delle intersezioni nel caso che la superficie fosse composta di n' piani. Ne segue che, se una curva d' ordine n avesse più di nn' punti comuni con una superficie d' ordine n', la curva giacerebbe interamente nella superficie.

Se un punto è $(r)^{plo}$ per la curva ed $(r')^{plo}$ per la superficie, esso si conterà come rr' intersezioni. P. e. un cono d' ordine r' avente il vertice in un punto $(r)^{plo}$ di una curva d' ordine n incontrerà questa in altri $nr'-rr'$; in fatti il cono prospettivo alla curva che ha il vertice in quel punto (13) è dell' ordine $n-r$, epperò sega il primo cono secondo $(n-r)r'$ generatrici.

Si dice che una curva ed una superficie hanno un contatto bipunto quando hanno due punti infinitamente vicini in comune, cioè quando una retta le tocca entrambe nello stesso punto; un contatto tripunto quando hanno tre punti infinitamente vicini in comune, cioè quando un piano oscula la curva e tocca la superficie nello stesso punto; ecc.

L' intersezione di due superficie d' ordini n_1, n_2 è una curva d' ordine n_1n_2 che ha $n_1n_2n_3$ punti comuni con una superficie d' ordine n_3; dunque tre superficie d' ordini n_1, n_2, n_3 hanno $n_1n_2n_3$ punti comuni (*).

Se le tre superficie avessero un comune punto di contatto, questo si conterebbe come quattro intersezioni. In fatti la curva comune alle prime due superficie ha col piano tangente comune, e quindi anche colla terza superficie, un contatto quadripunto.

22. Due superficie d' ordine n, n' abbiano un contatto d' ordine $r-1$ lungo una curva d' ordine m; esse si segheranno inoltre secondo un' altra curva d' ordine $nn'-rm$. Una superficie d' ordine n'' avente colla prima curva un contatto $(s)^{punto}$ in un punto o, la segherà in altri $n''m-s$ punti ed incontrerà la seconda curva in $n''(nn'-rm)$ punti. Dunque le due linee secondo le quali la terza superficie taglia le prime due avranno $n''m-s$ contatti $(r)^{punti}$ ed $n''(nn'-rm)$ intersezioni semplici. E siccome i punti comuni a queste linee sono quelli in cui s' incontrano le tre superficie, così le dette linee avranno $nn'n''-r(n''m-s)-n''(nn'-rm)$ intersezioni riunite in o. Dunque le due linee hanno in o un contatto $(rs)^{punto}$... (**).

(*) Ciò corrisponde al fatto analitico che tre equazioni algebriche di grado n_1, n_2, n_3 fra tre variabili sono risolute simultaneamente da $n_1n_2n_3$ sistemi di valori di queste variabili.

(**) Dupin *Développements* p. 231.

Il teorema non è applicabile quando $m = 1$ ed $n'' - 1$. Per es. una sviluppabile d' ordine r è toccata da un suo piano tangente lungo una generatrice e segata dal medesimo secondo una curva d' ordine $n - 2$, che tocca la generatrice in un punto o e la sega in altri $n - 4$ punti. Un altro piano passante per la generatrice segherà la sviluppabile secondo una curva d' ordine $n - 1$, che in o avrà $n - 1 - (n - 4)$ punti comuni colla generatrice, cioè questa curva sarà osculata dalla generatrice; come già si è veduto altrove (13).

Superficie di second' ordine.

23. Dicesi di second' ordine o quadrica una superficie (15) quando una retta arbitraria la incontra in due punti (reali, imaginari, distinti, coincidenti), ossia quando un piano arbitrario la sega secondo una conica o linea di second' ordine (reale o imaginaria).

Se una retta ha tre punti comuni colla superficie, giacerà interamente in questa; dunque la superficie contiene per intero le due rette che la osculano in un punto qualunque μ (16); e queste rette formano l' intersezione della superficie col piano tangente in μ, perchè una linea di second' ordine dotata di punto doppio si risolve necessariamente in due rette GG' (reali, imaginarie, ecc.).

Supponiamo da prima le rette GG' coincidenti, nel quale caso il piano sarà tangente alla superficie in tutti i punti della retta G. Un altro piano condotto per G segherà la superficie secondo una nuova retta che incontrerà la prima in un punto δ, il quale sarà doppio per la superficie, perchè questa è ivi toccata da entrambi i piani (17). Ma una superficie di second' ordine dotata di punto doppio è un cono col vertice in questo punto (18); e per ogni suo punto μ avrà luogo la coincidenza delle rette GG'. Donde s' inferisce che, se una quadrica ha un punto parabolico, tutti gli altri suoi punti sono pure parabolici, e la superficie è un cono.

24. Ora le rette GG', relative al punto μ, siano reali e distinte. Un piano condotto per la retta G e per un punto arbitrario v della superficie segherà questa lungo una nuova retta H' passante per v; e il piano tangente in v, siccome contiene già la retta H', così conterrà un' altra retta H passante per v e situata nella superficie. Dunque, se una quadrica ha un punto iperbolico, tutti i suoi punti sono iperbolici. Ossia, se una quadrica contiene una retta (reale), ne contiene infinite altre, ed eccettuato il caso che la superficie sia un cono, ne passano due per ciascun punto di essa.

Facendo, come dianzi, girare un piano intorno alla retta G, per ciascuna posizione di questo avremo una retta H', la quale incontrerà G in un punto ove il piano è tangente alla superficie. Questo punto non è mai lo stesso per due posizioni del piano, ossia per due rette H'; perchè la superficie, non essendo un cono, non può ammettere tre rette situate in essa e concorrenti in uno stesso punto. Da ciò che due rette H' incontrano G in punti diversi, segue che esse non possono mai cadere in uno stesso piano. Diremo che tutte queste rette H' (tra le quali è anche G') formano un sistema di generatrici rettilinee della superficie.

Se ora facciamo girare un piano intorno a G', otterremo analogamente un altro sistema di generatrici rettilinee della medesima superficie, le quali a due a due non sono mai in uno stesso piano, e sono tutte diverse dalle generatrici del primo sistema, perchè tutte incontrano G'. Fra queste nuove rette trovasi anche G.

Per tal modo la superficie contiene due sistemi di rette (*). Per ciascun punto della superficie passa una retta dell' uno ed una retta dell' altro sistema; e così ogni piano tangente contiene una retta di ciascun sistema. Il punto d' incontro di due rette di diverso sistema è il punto ove la superficie è toccata dal piano che contiene le due rette. Due rette dello stesso sistema non sono mai in uno stesso piano; ma ciascuna retta di un sistema incontra tutte le rette dell' altro.

Per evitare confusione nel linguaggio giova di chiamare generatrici le rette di un sistema e direttrici quelle dell' altro.

25. Se ora vogliamo considerare il terzo caso, che le rette GG' siano imaginarie (coniugate, col punto d' incrociamento reale), possiamo concludere a dirittura che, se una quadrica ha un punto ellittico, tutt' i suoi punti sono ellittici (**). In questo caso si potrà dire che la superficie contiene due sistemi di rette tutte imaginarie, e che ogni piano tangente sega la superficie secondo due rette imaginarie incrociate nel punto (reale) di contatto (***).

Per tal modo le superficie quadriche si dividono in tre specie ben distinte: superficie a punti iperbolici, superficie a punti ellittici, superficie a punti parabolici o coni.

Le superficie della prima specie offrono l' esempio più semplice di quelle che sono generate dal movimento di una linea retta e non sono sviluppabili (superficie gobbe).

Le superficie delle tre specie ammettono diverse forme, che si classificano in relazione alla sezione fatta dal piano all' infinito, come ha luogo nelle coniche (†).

Le superficie della prima specie, essendo formate da rette, si estendono all' infinito; ma il piano all' infinito può segarle secondo una curva, ovvero toccarle cioè segarle secondo due rette. Nel primo caso la superficie dicesi iperboloide gobbo o ad una falda; nel secondo paraboloide gobbo o iperbolico.

Le superficie della seconda specie o non si estendono all' infinito (ellissoide), o sono segate dal piano all' infinito secondo una curva (iperboloide a due falde), o sono toccate dal piano all' infinito in un punto (paraboloide ellittico).

(*) Wren *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici* etc. (Phil. Trans. 1669, p. 961.). Cfr. Journal de l' éc. polyt. cah. 1 (1794) p. 5.

(**) Dupin *Développements* p. 209.

In generale, una superficie d' ordine superiore al secondo ha una regione i cui punti sono tutti iperbolici ed un'altra regione i cui punti sono tutti ellittici; e le due regioni sono separate dalla curva parabolica, luogo dei punti parabolici. Gergonne *De la courbure des surfaces courbes* (Ann. Gerg. t. 21, 1830-31, p. 233).

(***) Poncelet *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris 1822) art. 594.

(†) Una conica dicesi iperbole, ellisse, parabola secondochè i suoi due punti all' infinito sono reali distinti, imaginari, coincidenti.

Le superficie della terza specie o hanno il vertice a distanza finita (c o n o propriamente detto) o hanno le generatrici parallele (c i l i n d r o), ed in quest' ultimo caso, secondochè il piano all' infinito sega la superficie lungo due rette reali distinte, immaginarie, o reali coincidenti, il cilindro dicesi i p e r b o l i c o, e l l i t t i c o o p a r a b o l i c o (*).

26. Prendiamo a considerare la quadrica di prima specie. Tre rette di un sistema, che riguarderemo come direttrici, bastano a individuarla. In fatti, per ogni punto di una delle tre rette si può condurre una trasversale che incontri le altre due; e tutte le trasversali analoghe saranno le generatrici della superficie (**). Da tre generatrici si dedurranno poi in modo analogo tutte le direttrici (***).

Due direttrici scelte ad arbitrio sono incontrate da tutte le generatrici in punti formanti due punteggiate projettive; il che riesce evidente considerando che da un punto qualunque di ciascuna direttrice parte una sola generatrice (†). Dunque il rapporto anarmonico de' quattro punti ne' quali quattro generatrici fisse incontrano una direttrice è costante qualunque sia questa direttrice.

Analogamente due direttrici determinano con tutte le generatrici due fasci projettivi di piani; ossia il rapporto anarmonico de' quattro piani che passano rispettivamente per quattro generatrici fisse e si segano tutti lungo una stessa direttrice è costante qualunque sia questa direttrice.

Viceversa: le rette che uniscono i punti corrispondenti di due rette punteggiate projettive, non situate nello stesso piano, formano una superficie di second' ordine. Siano G, H le due rette, g, h due punti corrispondenti, e g' il punto in cui G è incontrata dalla retta che parte da h e sega una trasversale T fissata ad arbitrio. Variando h, i punti g, g' generano due punteggiate projettive in G, ed i punti comuni a queste daranno le due rette che uniscono punti corrispondenti di G, H e sono incontrate da T.

Se le due rette date sono divise in parti proporzionali ne' punti corrispondenti, la superficie generata sarà il paraboloide gobbo (††).

(*) Euler *Introductio in analysin infinitorum*, t. 2, app. cap. 5.

(**) È facilissimo rispondere alla domanda di quale ordine sia la superficie luogo delle rette X che incontrano tre rette date G, H, K. Sia T una trasversale arbitraria; l'ordine della superficie sarà il numero delle rette X che incontrano le quattro rette G, H, K, T. Da un punto qualunque g di G si conduca una retta che incontri H ed anche T in t; e dallo stesso punto g si conduca un'altra retta che incontri K e poi T in t'. Variando g, i punti t, t' generano due punteggiate projettive; i due punti comuni a queste daranno le due rette appoggiate alle quattro rette G, H, K, T. Cioè la superficie di cui si tratta è di second' ordine.

(***) Ne segue che la superficie è anche determinata da due direttrici e da tre punti fuori di queste; perchè condotte le generatrici per questi tre punti, si avranno le tre coppie di punti corrispondenti necessarie e sufficienti per individuare le punteggiate projettive.

(†) Se osserviamo che ogni direttrice ha un punto all'infinito pel quale dee passare una generatrice, troviamo che nell'iperboloide gobbo ogni direttrice ha la sua parallela fra le generatrici. Il piano che contiene due rette parallele, una direttrice e una generatrice, è tangente in un punto all'infinito, epperò dicesi p i a n o a s s i n t o t o. Ma nel paraboloide gobbo il piano all'infinito, essendo tangente alla superficie, contiene una generatrice nella quale sono i punti all'infinito di tutte le direttrici e una direttrice nella quale sono i punti all'infinito di tutte le generatrici. Perciò in questo caso ogni piano assintoto sega la superficie secondo una sola retta a distanza finita; e tutti i piani assintoti formano due fasci di piani paralleli.

(††) Perchè i punti all'infinito delle due punteggiate essendo punti corrispondenti, la superficie ha una generatrice a distanza infinita.

Ed anche le rette intersezioni dei piani corrispondenti di due fasci projettivi formano una superficie di second' ordine. Perchè un piano arbitrario segherà i piani de' due fasci secondo rette formanti due stelle projettive, i raggi corrispondenti delle quali intersecandosi formeranno una curva di second' ordine; cioè la superficie di cui si tratta è segata da un piano qualunque lungo una curva di second' ordine (*).

Se le due rette date, nelle quali sono le due serie projettive di punti o per le quali passano i due fasci projettivi di piani, giacciono in uno stesso piano, la superficie generata sarà un cono quadrico avente il vertice nel punto comune alle rette date (5).

27. Se da un punto o fissato nello spazio come polo si tiri una trasversale qualunque ad incontrare una data superficie quadrica in due punti a_1a_2, e si prenda il punto m coniugato armonico di o rispetto ad a_1a_2, quale sarà il luogo dei punti m corrispondenti a tutte le trasversali che escono da o? Ogni trasversale contiene un solo punto m; e questo punto non può mai cadere in o, finchè o si supponga non situato nella superficie. Dunque il luogo cercato è di prim' ordine, ossia un piano. Lo chiamano il piano polare del polo o (**).

Se il punto o è preso sulla superficie, una delle intersezioni a_1a_2 coinciderà col polo; onde per tutte le trasversali che incontrano la superficie in un secondo punto distinto da o, il coniugato armonico m cadrà in o. Ma se la trasversale diviene tangente in o alla superficie, allora, coincidendo insieme il polo e i due punti a_1a_2, il punto m diviene indeterminato e può essere uno qualunque della trasversale (***); cioè il luogo del punto m sarà il luogo delle rette che toccano in o la superficie. Dunque, se il polo è un punto della superficie, il piano polare è il piano che la tocca in questo punto. Viceversa un punto non può giacere nel suo piano polare senza essere un punto della superficie.

Se nella trasversale che contiene i quattro punti oma_1a_2 si considera m come polo, il punto coniugato armonico sarà o; cioè se il piano polare di o passa per m, viceversa il piano polare di m passerà per o. Onde, se è dato un piano e si prendono i piani polari di tre suoi punti, il punto ove concorrono questi tre piani sarà il polo del piano dato. Il quale non potrà mai avere due poli diversi o_1, o_2 (†); perchè se la retta o_1o_2 incontra la quadrica in a_1a_2 ed il piano in m, il punto m non può avere due diversi punti coniugati armonici rispetto alla stessa coppia a_1a_2.

Così avviene che ogni punto dello spazio ha il suo piano polare e viceversa ogni piano ha il suo polo. Tutt' i punti che giacciono in un piano fisso hanno i loro piani polari passanti pel polo del piano fisso, e tutti i piani passanti per un punto fisso hanno i loro poli nel piano polare del punto fisso.

(*) Steiner *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin 1832) § 51.

(**) Evidentemente un piano condotto ad arbitrio per o sega il piano polare secondo una retta che è la polare di o rispetto alla conica, sezione della superficie.

(***) *Introd.* 17.

(†) Ciò nel caso generale che la quadrica non abbia un punto doppio. Vedi la prima nota all' art. 30.

28. Siano M, N i piani polari di due punti m, n. Ciascun punto della retta MN, essendo situato in entrambi i piani M, N, avrà il suo piano polare passante per m e per n, cioè per la retta mn; dunque il luogo di un punto i cui piani polari passino per una retta fissa mn è un' altra retta MN. Il piano polare di un punto qualunque di MN passa per ogni punto della mn; dunque il piano polare di qualunque punto della mn passerà per la retta MN; ossia le rette mn, MN sono così tra loro connesse che ciascuna contiene i poli dei piani passanti per l' altra e giace nei piani polari dei punti dell' altra. Due rette aventi tra loro questa relazione diconsi c o n i u g a t e o r e c i p r o c h e rispetto alla quadrica, ovvero anche p o l a r i l' una dell' altra.

Ogni retta ha la sua coniugata. Se una retta R passa per un punto m, la coniugata R' giacerà nel piano M polare di m, e viceversa (*). Dunque tutte le rette passanti per m hanno per coniugate tutte le rette del piano M; per conseguenza due rette coniugate non possono essere insieme in un piano M senza passare tutte e due pel polo m. Ma in questo caso m è un punto della superficie, M è il piano tangente; e le due rette coniugate sono entrambe tangenti alla superficie. Viceversa, se una retta tocca la quadrica in m, la coniugata sarà nel piano M tangente in m; e siccome la prima retta giace anch' essa in M, la seconda passerà pur essa per m; cioè le due rette saranno tangenti alla superficie nello stesso punto. Dunque una retta in generale non incontra la sua coniugata; ma se ha luogo l' incontro, le due rette sono tangenti in uno stesso punto alla superficie.

Le rette tangenti in m alla superficie sono coniugate a due a due, epperò formano un' involuzione (di secondo grado (**)). Questa avrà due raggi doppi, cioè vi sono fra quelle tangenti due rette coniugate a sè medesime. Una retta coniugata a sè stessa è situata nei piani polari de' suoi punti, cioè ha tutt' i suoi punti giacenti ne' rispettivi piani polari epperò nella superficie; vale a dire, una retta coniugata a sè stessa è necessariamente una retta situata nella superficie. Dunque i raggi doppi dell' involuzione formata dalle tangenti coniugate in m sono le rette della superficie incrociate in m. Ne risulta che due tangenti coniugate formano sistema armonico colle rette della superficie incrociate nel punto di contatto.

Se la quadrica è un cono, i due raggi doppi dell' involuzione coincidono nella generatrice che passa pel punto che si considera. Questa generatrice è coniugata non solo a sè stessa, ma anche a qualunque retta tangente al cono in un punto di essa.

29. Cerchiamo ora di qual classe (16) sia una superficie di second' ordine. I piani tangenti, passanti per una retta data R, avranno i loro poli (i punti di contatto) sulla retta coniugata R'; dunque tanti sono i piani che per R

(*) Dicesi c e n t r o il polo del piano all' infinito; in esso si bisecano tutte le corde della superficie che vi passano. D i a m e t r o è una retta la cui coniugata è tutta a distanza infinita, cioè una retta passante pel centro. Un piano dicesi d i a m e t r a l e quando ha il polo all' infinito. Un diametro e un piano diametrale diconsi c o n i u g a t i quando il secondo contiene la retta coniugata al primo; il piano divide per metà le corde parallele al diametro. Tre diametri diconsi c o n i u g a t i quando ciascuno d' essi è coniugato al piano degli altri due.

(**) *Introd.* 25.

si ponno condurre a toccare la superficie quante le intersezioni di questa con R'. Una superficie di second' ordine è dunque di seconda classe.

Se le intersezioni m, m' della superficie con R coincidono, coincideranno anche i piani tangenti in m, m', cioè i piani tangenti che passano per R'. Ma in questa ipotesi le rette R, R' sono tangenti coniugate (28); dunque una tangente non è soltanto la retta che unisce due punti infinitamente vicini, ma è anche l' intersezione di due piani tangenti consecutivi; e di due tangenti coniugate ciascuna è l' intersezione de' piani che toccano la superficie ne' punti infinitamente vicini situati nell' altra.

30. Condotta per un punto o dello spazio, preso come polo (27), una retta che tocchi la superficie in un punto a (rappresentante le due intersezioni $a_1 a_2$), il punto coniugato armonico m cadrà anch' esso in a; cioè a sarà un punto del piano polare di o (*). Dunque il luogo dei punti in cui la quadrica è toccata da rette uscenti dal polo è la curva (di second'ordine) intersezione della superficie col piano polare. La tangente in a a questa curva, essendo una retta situata nel piano polare, avrà per sua coniugata la retta ao diretta al polo; e il piano di queste due rette sarà simultaneamente tangente in a alla quadrica e lungo oa al cono luogo delle rette ao. Questo cono, che è di second' ordine (perchè una sua sezione piana è di second' ordine), dicesi c i r c o s c r i t t o alla quadrica (**).

Dunque il luogo delle rette passanti per un punto dato e tangenti alla superficie quadrica, ossia l' inviluppo dei piani passanti per lo stesso punto dato e tangenti alla superficie, è un cono di second' ordine (***); la curva di contatto è piana; ed il piano di essa è il piano polare del vertice del cono. Viceversa, i piani tangenti alla superficie ne' punti di una sezione piana inviluppano un cono il cui vertice è il polo del piano della sezione (†).

(*) Donde segue che, se la quadrica data è un cono di vertice v, il piano polare di qualunque polo o passa per v. Questo piano polare non cambia se il polo si muove sulla retta ov; in fatti il piano polare è in questo caso il luogo della retta coniugata armonica di ov rispetto alle due generatrici del cono che si ottengono segandolo con un piano variabile intorno ad ov. Se ov si muove in un piano fisso (passante pel vertice), il piano polare roterà intorno ad una retta i cui punti sono i poli del piano fisso. Ritroviamo così quel sistema di rette e di piani polari, che già avevamo dedotto dalla teoria delle coniche (5). Il piano polare del vertice è evidentemente indeterminato.

(**) Se due quadriche si toccano lungo una curva, questa è necessariamente piana. In fatti, se a, b, c sono tre punti della curva di contatto, il piano abc segherà le due superficie secondo due coniche che, avendo tre punti di contatto fra loro, necessariamente coincidono. All' infuori di questa conica di contatto, le due superficie non hanno alcun punto comune (20). Un piano condotto per una tangente di questa conica segherà le due quadriche secondo due coniche aventi un contatto quadripunto (22).

(***) Dunque i piani passanti per un punto fisso e per le rette che congiungono i punti corrispondenti di due date rette punteggiate projettive (26) inviluppano un cono quadrico (Steiner *System. Ent.* pag. 187).

(†) Di qui risulta che i piani assintoti (i piani tangenti ne' punti all' infinito) inviluppano un cono il cui vertice è il polo del piano all' infinito cioè il centro della superficie. Se ne conclude una regola semplicissima per trovare il centro dell' iperboloide del quale siano date tre direttrici. Hachette *Einige Bemerkungen über Flächen zweiter Ordnung* (G. di Crelle t. 1; 1826) p. 345.

Combinando il teorema dell' art. 30 con quelli degli art. 27 e 28, possiamo dire che, se il vertice di un cono circoscritto ad una quadrica data si muove descrivendo una retta o un piano, il piano della curva di contatto passerà costantemente per una retta fissa o per un punto fisso: proposizione dovuta a Monge (*Géométrie descriptive* art. 40).

Superficie di classe qualunque. Polari reciproche.

31. Sia μ un punto qualunque di una data superficie, M il piano tangente in quel punto; e $\mu\mu_1$, $\mu\mu_2$, $\mu\mu_3$ siano punti successivi in questo piano, in tre diverse direzioni, cioè $\mu\mu_1$, $\mu\mu_2$, $\mu\mu_3$ siano tre tangenti in μ. Se si fa passare pei punti μ, μ_1, μ_2 una superficie di second' ordine, questa sarà toccata in μ dal piano M, epperò essa conterrà anche il punto μ_3, qualunque sia la direzione $\mu\mu_3$ (nel piano M); cioè le due superficie avranno in μ il piano tangente comune. Suppongasi ora che la superficie data venga segata da un piano passante per $\mu\mu_1$, da un altro piano per $\mu\mu_2$ e da un terzo piano per $\mu\mu_3$, in modo che ne risultino tre curve, nelle quali siano μ'_1, μ'_2, μ'_3 i punti consecutivi a $\mu\mu_1$, $\mu\mu_2$, $\mu\mu_3$. Allora, se si imagina che l' anzidetta quadrica sia obbligata a passare anche pei punti μ'_1, μ'_2, μ'_3, le due superficie si osculeranno in μ, cioè le sezioni delle medesime, ottenute con un piano condotto ad arbitrio per μ, avranno ivi un contatto tripunto (19), e in particolare le rette osculatrici alla superficie qualsivoglia giaceranno per disteso nella quadrica. Per conseguenza, le due superficie avranno il piano tangente comune, non solamente in μ, ma anche in ciascuno de' punti μ_1, μ_2, μ_3, ... immediatamente consecutivi a μ. Quindi, come avviene per la superficie quadrica, così anche per la superficie qualsivoglia ogni retta tangente in μ sarà l' intersezione di due piani tangenti consecutivi, i cui punti di contatto saranno situati in un' altra tangente; e viceversa nei due punti consecutivi comuni alla prima tangente ed alla superficie, questa sarà toccata da due piani passanti per la seconda tangente. Cioè le tangenti in μ alla superficie qualsivoglia sono c o n i u g a t e a due a due per modo che di due coniugate ciascuna contiene i punti di contatto de' due piani tangenti consecutivi che passano per l' altra (*). Le coppie di tangenti coniugate formeranno un' involuzione i cui raggi doppi saranno le rette della quadrica, cioè le osculatrici della superficie qualsivoglia.

Se μ è un punto parabolico per la data superficie, ivi coincideranno le due rette osculatrici, epperò la quadrica osculatrice sarà un cono. In μ e nel punto μ' successivo a μ nella retta osculatrice (cioè nella generatrice del cono) le due superficie hanno il piano tangente comune; ma il cono è toccato in μ e in μ' dallo stesso piano; dunque il piano che tocca in μ la superficie data la tocca anche in μ'. Un piano tangente in un punto parabolico è dunque da risguardarsi come un piano tangente in due punti infinitamente vicini; a cagione della quale proprietà dicesi p i a n o s t a z i o n a r i o. Siccome in questo caso ogni tangente in μ è coniugata alla retta osculatrice, così il piano tangente in qualunque punto consecutivo a μ passerà per quest' ultima retta (**).

Se due superficie si toccano in un punto μ, le loro tangenti coniugate formeranno due involuzioni, e siccome queste hanno una sola coppia di raggi

---

(*) Dupin *Développements* p. 44.

(**) Salmon *On the condition that a plane should touch a surface* ecc. (Camb. and D. Math. J. t. 3; 1848) p. 45.

coniugati comuni (*), così le due superficie avranno in generale una sola coppia di tangenti coniugate comuni. Che se vi fossero due coppie di tangenti coniugate comuni, le due involuzioni coinciderebbero; ogni tangente avrebbe la stessa coniugata rispetto ad entrambe le superficie, alle quali per conseguenza sarebbero comuni anche le rette osculatrici.

32. S' imaginino ora tutte le rette che da un dato punto o dello spazio si possono condurre a toccare una superficie data qualsivoglia, sulla quale i punti di contatto formeranno una certa curva. Se μ, μ' sono due punti consecutivi di questa, le rette $o\mu$, $\mu\mu'$, essendo tangenti coniugate per la quadrica osculatrice in μ, saranno tali anche per la superficie qualsivoglia. Il piano che tocca in μ questa superficie, toccherà lungo $o\mu$ il cono che le è circoscritto, cioè il cono formato dalle tangenti condotte da o. Questo cono è dunque l' inviluppo dei piani che si possono condurre per o a toccare la superficie.

33. Le cose suesposte mostrano che una superficie d' ordine qualunque può anche essere definita come inviluppo de' suoi piani tangenti. Un inviluppo si può risguardare come generato da un piano che si muova continuamente nello spazio secondo una legge tale che una retta arbitraria giaccia in un numero discreto di posizioni del piano variabile (**). La superficie-inviluppo dicesi della classe n (***) quando per una retta arbitraria passano n de' suoi piani (reali, imaginari, ecc.). Onde se per una retta passassero più di n piani tangenti ad una superficie della classe n, tutt' i piani passanti per la medesima retta apparterrebbero all' inviluppo, cioè la retta giacerebbe per intero nella superficie.

L' inviluppo di prima classe è un semplice punto.

I piani tangenti d' una superficie di classe n che passano per un punto fisso inviluppano un cono circoscritto della stessa classe.

Si dirà che una retta è tangente alla superficie in un piano M (tangente alla superficie medesima), quando due dei piani tangenti passanti per essa coincidono in M. Siano R, R' due rette tangenti nel piano M, e il punto μ ad esse comune si consideri come vertice di un cono circoscritto. Siccome due de' piani tangenti che si possono condurre al cono per R o per R' coincidono in M, così questo è un piano bitangente del cono e rappresenta due piani tangenti (al cono e quindi anche alla superficie) consecutivi per qualunque altra retta condotta per μ nel detto piano; cioè tutte queste rette saranno tangenti nel piano M alla superficie. Donde risulta che le rette le quali toccano la superficie nel piano M (cioè le rette per le quali M rappresenta due piani tangenti consecutivi) passano per uno stesso punto μ, che dicesi punto di contatto del piano M colla superficie. Fra quelle rette ve ne sono due, le generatrici di contatto del cono col piano bitangente, per le quali M rappresenta tre piani tangenti consecutivi. Le tangenti poi saranno con-

---

(*) *Introd.* 25 b.

(**) Ossia in modo che tutte le successive posizioni del piano mobile si possano ottenere dalle variazioni di due parametri indipendenti. Dunque una superficie-inviluppo (escluse le sviluppabili) è una serie doppiamente infinita di piani.

(***) Gergonne *Rectification de quelques théorèmes etc.* (Ann. Gerg. t. 18; 1827-28) p. 151.

iugate a due a due, in modo che di due coniugate ciascuna contenga i punti di contatto de' piani tangenti consecutivi che passano per l' altra. E i raggi doppi dell' involuzione formata da queste coppie di tangenti saranno le rette per le quali M rappresenta tre piani tangenti consecutivi. Ossia, queste rette sono le stesse che hanno in μ un contatto tripunto colla superficie (16).

34. Per tal modo una superficie qualunque può essere considerata e come luogo di punti e come inviluppo di piani. Applicando le considerazioni precedenti ad una superficie di seconda classe (una superficie alla quale si possano condurre due piani tangenti per una retta arbitraria), troviamo che i piani tangenti che passano per un punto μ della superficie inviluppano un cono di seconda classe dotato di un piano bitangente M; ossia quei piani passano per due rette G, G' incrociate in μ e situate nel piano M che tocca ivi la superficie (5). Ciascuna di queste rette, essendo posta in infiniti piani tangenti, giacerà per disteso nella superficie.

Un piano condotto ad arbitrio per G sarà un piano tangente alla superficie e quindi segherà questa secondo una nuova retta H'. Similmente ogni piano passante per G' conterrà un' altra retta H della superficie. In questa esistono adunque due sistemi di rette generatrici ($G, H, \ldots$), ($G', H', \ldots$); e per ciascun punto della superficie passa una retta dell' uno ed una retta dell' altro sistema.

Di quale ordine è la superficie? Ciò equivale a domandare quante generatrici di uno stesso sistema sono incontrate da una retta arbitraria. Per questa retta passano due soli piani tangenti, cioè due soli piani ciascun de' quali contenga una generatrice del sistema; dunque una superficie di seconda classe è anche di second' ordine.

In un piano arbitrariamente dato O si tiri comunque una trasversale, per la quale passeranno due piani $A_1 A_2$ tangenti ad una data quadrica (superficie di seconda classe e second' ordine); sia poi M il piano coniugato armonico di O rispetto ad $A_1 A_2$. Siccome per ogni posizione della trasversale non si ha che un solo piano M, e siccome M non può coincidere col piano O, supposto che questo non sia tangente alla superficie, così l' inviluppo di tutti i piani analoghi ad M è di prima classe, ossia tutti quei piani passeranno per un punto fisso o.

Se la trasversale è condotta in modo che tocchi la superficie in un punto a (della sezione fatta dal piano O), i piani $A_1 A_2$ coincideranno in un solo, cioè nel piano A tangente in a; epperò anche il piano M coinciderà con A. Dunque i piani che toccano la superficie ne' punti della sezione fattavi dal piano O passano tutti per o. Ne segue che o è il polo del piano O secondo la definizione data altrove (27).

35. Ciascuno avrà notato che il ragionamento corre qui affatto parallelo a quello che si è tenuto per la superficie considerata come luogo di punti, e tuttavia senza che l' una investigazione presupponga necessariamente l' altra. Ciò costituisce la legge di dualità geometrica, in virtù della quale accanto ad una proprietà relativa a punti, rette, piani, ne sussiste un' altra

analoga relativa a piani, rette, punti (*). Le due proprietà si chiamano r e c i p r o c h e.

Però, invece di dimostrare due teoremi reciproci indipendentemente l' uno dall' altro, ovvero di concludere l' uno dall' altro invocando l a l e g g e d i d u a l i t à, a m m e s s a a p r i o r i c o m e p r i n c i p i o a s s o l u t o, si può anche ricavare l' un teorema dall' altro per mezzo della teoria dei poli relativi ad una data superficie di second' ordine. Data una figura, se di ogni punto, di ogni retta e di ogni piano in essa prendiamo il piano polare, la retta coniugata ed il polo (rispetto alla quadrica fissa), otterremo una seconda figura, nella quale i punti, le rette, i piani corrisponderanno ordinatamente ai piani, alle rette, ai punti della prima. Ai punti di una retta corrisponderanno i piani per un' altra retta; cioè ad una retta punteggiata corrisponderà un fascio di piani; ed è evidente che queste due forme saranno projettive, onde il rapporto anarmonico di quattro punti in linea retta sarà eguale a quello de' quattro piani corrispondenti.

Due figure così fatte diconsi p o l a r i r e c i p r o c h e. Ad un teorema relativo all' una corrisponderà il teorema reciproco relativo all' altra. Per tal modo la legge di dualità si presenta come una conseguenza della teoria delle superficie di second' ordine (m e t o d o d e l l e p o l a r i r e c i p r o c h e) (**).

36. Se nella prima figura un punto descrive una superficie S d' ordine n, nella seconda il piano corrispondente si conserverà tangente ad una superficie S' di classe n (***). Ad un punto p della prima superficie corrisponderà un piano P' tangente ad S'; ed alle rette tangenti in p ad S corrisponderanno le rette tangenti ad S' in P'. Ma le prime tangenti giacciono nel piano P che tocca S in p; e le seconde passano pel punto p' ove S' è toccata da P'; dunque il piano P è precisamente quello che corrisponde al punto p'. Donde segue che, se nella seconda figura un punto descrive la superficie S', il piano corrispondente si manterrà tangente alla superficie S; epperò, se S è della classe m, S' sarà dell' ordine m. E così appare manifesta la perfetta reciprocità fra le superficie S, S', che a cagione di ciò diconsi p o l a r i r e c i p r o c h e (†).

37. Se nella prima figura è data una sviluppabile Σ, cioè una serie semplicemente infinita di piani, ad essa corrisponderà nella seconda figura una serie semplicemente infinita di punti, ossia una curva Σ' (e viceversa ad una curva corrisponderà una sviluppabile). Alle generatrici di Σ, cioè alle rette per ciascuna delle quali passano due piani tangenti consecutivi, corrisponderanno le rette che uniscono due punti consecutivi di Σ', cioè le tangenti di

---

(*) GERGONNE *Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue* (Ann. Gerg. t. 16 ; 1825-26) p. 209. CHASLES *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Mém. couronnés par l' Acad. de Bruxelles, t. 11 ; 1827) Notes 5 et 34.

(**) PONCELET *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* (G. di Crelle t. 4, 1829).

(***) Dunque, se il polo descrive una superficie di second' ordine, il piano polare inviluppera un' altra superficie dello stesso ordine. LIVET *Propriétés des surfaces du second degré*; e BRIANCHON *Mémoire sur les surfaces du second degré* (Journ. de l' éc. polyt. cah. 10, 1806).

(†) MONGE *Mémoire* (inédit) *sur les surfaces réciproques* (vedi *Aperçu*, Note 30).

Abbiamo già veduto (18) quanti punti sono necessari per individuare una superficie-luogo d' ordine n. Lo stesso numero di piani tangenti individuerà una superficie-inviluppo di classe n.

questa curva. Ai punti di una generatrice di Σ corrisponderanno i piani che passano per la corrispondente tangente di Σ', cioè i piani che toccano Σ' in uno stesso punto. Onde, come una sviluppabile è una serie doppiamente infinita di punti, cioè un caso particolare delle superficie-luoghi, così una curva è una serie doppiamente infinita di piani, cioè un caso particolare delle superficie-inviluppi.

Sia P un piano tangente di Σ, p' il punto corrispondente di Σ'. Il piano P conterrà due generatrici consecutive di Σ, e al punto p comune ad esse corrisponderà il piano P' determinato dalle due tangenti consecutive di Σ' incontrantisi in p'; ossia al punto p della curva cuspidale di Σ corrisponderà il piano P' osculatore a Σ' in p'. Dunque, se un punto percorre la curva cuspidale di Σ, il piano corrispondente si manterrà osculatore a Σ', cioè inviluppera la sviluppabile osculatrice di Σ'. Ai punti ove concorrono due generatrici non consecutive di Σ corrisponderanno i piani che contengono due tangenti non consecutive di Σ', cioè alla curva nodale di Σ corrisponderà la sviluppabile bitangente di Σ'; ecc. Epperò se per Σ, r è l' ordine, m la classe, n l' ordine della curva cuspidale, x l'ordine della curva doppia, α il numero de' piani stazionari, g il numero delle rette situate in un piano qualunque per ciascuna delle quali passano due piani tangenti, ecc.; la curva Σ' sarà dell' ordine m, la sua sviluppabile osculatrice sarà dell' ordine r e della classe n, la sua sviluppabile bitangente sarà della classe x; Σ' avrà α punti stazionari e g corde concorrenti in un punto arbitrario, ecc.

Se, come caso speciale, la sviluppabile Σ è un cono, cioè se tutti i piani della serie passano per un punto fisso, i punti corrispondenti saranno tutti in un piano fisso, cioè Σ' sarà una curva piana (*).

38. Assunte di nuovo le superficie reciproche S, S', alle sezioni piane dell' una corrisponderanno i coni circoscritti all' altra. Se la superficie S ha un punto doppio ove sia osculata da infinite rette formanti un cono quadrico, S' avrà un piano tangente doppio nel quale coincideranno due piani tangenti per ogni retta tracciata in esso ad arbitrio, e tre per ciascuna delle tangenti di una certa conica, che è una curva di contatto fra il piano e la superficie. Quel cono può decomporsi in due piani distinti (punto biplanare) o coincidenti (punto uniplanare), così questa conica potrà degenerare in due punti distinti (piano bitangente) o consecutivi (piano stazionario (31)).

In generale, se S ha un punto $(r)^{plo}$, cioè un punto che rappresenti r intersezioni riunite con una retta condotta per esso ad arbitrio, ed $r+1$ intersezioni riunite per le generatrici di un certo cono osculatore d' ordine r; S' avrà un piano tangente $(r)^{plo}$, ossia un piano che terrà luogo di r piani tangenti coincidenti per una retta tirata in esso ad arbitrio, e di $r+1$ piani

---

(*) Livet e Brianchon l. c.

Se Σ è un cono quadrico, Σ' sarà una conica. Perciò, come un cono quadrico è un caso particolare fra le superficie di secondo ordine, così una conica è un caso particolare fra le superficie di seconda classe. Si ottiene questo caso quando in uno, epperò in tutti i piani tangenti le due rette osculatrici coincidono in una sola retta (che è tangente alla curva). Tutti i piani che passano per questa retta hanno lo stesso punto di contatto.

tangenti coincidenti per ciascuna retta toccata da una certa curva (curva di contatto) di classe r. E secondochè il cono osculatore si spezza in coni minori od anche in piani, così la curva di contatto si decomporrà in curve di classe inferiore od anche in punti.

Come un luogo d' ordine n avente un punto $(n)^{plo}$ è un cono, così un inviluppo di classe n dotato di un piano tangente $(n)^{plo}$ sarà una curva piana (*).

39. Ad una curva Σ' tracciata sopra S' corrisponderà una sviluppabile Σ formata da piani tangenti di S (sviluppabile circoscritta ad S) ; ed alla curva dei punti di contatto fra Σ ed S corrisponderà la sviluppabile formata dai piani tangenti ad S' ne' punti di Σ', cioè la sviluppabile circoscritta ad S' lungo Σ'. Se Σ' è una curva doppia per S', cioè una curva ciascun punto della quale sia biplanare per la superficie, la sviluppabile Σ sarà bitangente per S, cioè sarà formata da piani, ciascuno avente due punti distinti di contatto con S. Se Σ' è una curva cuspidale per S', cioè una curva in ciascun punto della quale la superficie abbia due piani tangenti coincidenti, la sviluppabile Σ sarà osculatrice ad S, cioè sarà formata da piani ciascuno avente due punti consecutivi di contatto con S. Questi piani sono quelli che diconsi s t a z i o n a r i ed i cui punti di contatto sono i punti parabolici della superficie (31).

Alla curva lungo la quale si segano due superficie S, T, corrisponderà la sviluppabile formata dai piani tangenti comuni alle superficie corrispondenti S', T' (**) ; ai punti comuni a tre superficie corrisponderanno i piani che toccano le tre superficie corrispondenti; alle superficie che passano per una stessa curva le superficie toccate da una stessa sviluppabile, ecc.

Se due superficie S, T si toccano in un punto p, cioè se hanno un punto comune p collo stesso piano tangente P, le superficie reciproche S', T' avranno il piano tangente comune P' collo stesso punto di contatto p', ossia anche S', T' si toccheranno in un punto p'. Se S, T si toccano lungo una curva, anche S', T' si toccheranno lungo un' altra curva, ecc.

40. Se due superficie d' ordine n hanno in comune una curva d' ordine nr situata sopra una superficie d'ordine r $(r<n)$, esse si segheranno inoltre secondo un' altra curva d' ordine $n(n-r)$ situata in una superficie d' ordine $n-r$ (***). Da questo teorema si ricava, col metodo delle polari reci-

---

(*) Più avanti si vedrà che, se una superficie ha un punto doppio, per esso devono passare quattro superficie (polari) le quali, nel caso che la superficie sia affatto generale nel suo ordine, non hanno alcun punto comune. Donde segue che la superficie più generale di un dato ordine non ha punti doppi. Affinchè un piano tocchi la superficie in un punto, in due punti (distinti o consecutivi), in tre punti (s' intenda che i punti di contatto non sono dati), bisogna sodisfare ad una, due, tre condizioni. Ora un piano è appunto determinato da tre condizioni ; dunque una superficie generale nel suo ordine avrà una serie (semplicemente) infinita di piani bitangenti, una serie (semplicemente) infinita di piani stazionari, ed un numero finito di piani tritangenti.

Reciprocamente : una superficie affatto generale nella sua classe non avrà piani tangenti multipli, bensì infiniti punti biplanari formanti una curva nodale, infiniti punti uniplanari formanti una curva cuspidale, ed un numero finito di punti triplanari (punti tripli colle rette osculatrici in tre piani).

(**) Abbiamo trovato quanti punti individuano la curva comune a due superficie d'ordini n_1, n_2; altrettanti piani tangenti individueranno la sviluppabile circoscritta a due superficie di classi n_1, n_2.

(***) Si dimostra questo teorema tagliando le superficie proposte con un piano arbitrario, ed osservando che per le curve che ne risultano ha luogo il teorema : se due curve d'ordine n si segano in nr punti situati in una curva d'ordine r, esse avranno altri $n(n-r)$ punti comuni giacenti in una curva d'ordine $n-r$ (*Introd.* 43.)

proche quest' altro: se due superficie di classe n sono inscritte in una sviluppabile della classe nr, nella quale sia anche inscritta una superficie della classe r, vi sarà un' altra sviluppabile della classe $n(n-r)$ che sarà circoscritta alle due superficie di classe n e ad una nuova superficie di classe $n-r$.

P. e. per $n=2$, $r=1$ si ha:

Se due quadriche passano per una stessa curva piana, esse si segheranno secondo un' altra curva piana (*). E se due quadriche sono inscritte in uno stesso cono (necessariamente di secondo ordine) esse avranno un altro cono circoscritto comune.

Due quadriche si segano in generale secondo una curva gobba del quarto ordine. Ma se hanno una retta (direttrice) comune, la loro rimanente interse-

---

(*) Ciò avviene quando le due quadriche si toccano in due punti a, b non situati sopra una retta comune. I punti a, b saranno doppi per la intersezione completa delle due superficie (19); quindi il piano condotto per ab e per un altro punto comune ad esse le segherà secondo una stessa conica, perchè due coniche aventi tre punti comuni e in due di questi le stesse tangenti coincidono. Così il piano condotto per ab e per un nuovo punto comune, non situato nella conica anzidetta, segherà le due superficie secondo un' altra conica. Viceversa, se due quadriche hanno una epperò due coniche comuni, queste si segheranno in due punti (nella retta intersezione de' loro piani), ne' quali le superficie si toccheranno.

La proposizione reciproca è che, se due quadriche si toccano in due punti (non situati sopra una retta comune), esse sono inscritte in due coni i cui vertici si trovano nella retta intersezione de' piani A, B tangenti in quei punti; e viceversa, se due quadriche sono inscritte in uno epperò in due coni, esse si toccheranno in due punti, ecc.

Dalla combinazione delle due proposizioni reciproche segue che, *se due quadriche passano per due curve piane, sono anche inscritte in due coni, e viceversa.*

Un teorema un po' più generale è il seguente: *quando due quadriche sono inscritte in una stessa quadrica, esse hanno due coniche comuni.* In fatti, le due curve di contatto si segheranno in due punti, situati nella retta comune ai loro piani; in ciascuno di questi punti le tre quadriche si toccano, epperò ha luogo la proprietà enunciata. I piani delle due coniche comuni alle prime due quadriche passeranno pei due punti di contatto, cioè per la retta intersezione dei piani delle curve di contatto colla terza quadrica. Dal teorema reciproco si ricava inoltre che i vertici dei due coni circoscritti simultaneamente alle due prime superficie sono in una stessa retta coi vertici dei coni circoscritti separatamente alle medesime lungo le loro curve di contatto colla terza superficie. Viceversa, se due quadriche si segano secondo due coniche, esse sono inscritte simultaneamente in infinite altre quadriche, fra le quali vi sono due coni, ecc. Queste proprietà delle superficie di second' ordine sono dovute a Monge (Correspondance sur l' école polyt., t. 2, p. 321 e seg.). Cfr. Poncelet *Propriétés projectives des figures* (Paris 1822) suppl.

Siano Q_1, Q_2, Q_3 tre quadriche toccantisi negli stessi punti a, b; ed A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 le coppie di piani (passanti per ab) contenenti le coniche nelle quali si segano Q_2 e Q_3, Q_3 e Q_1, Q_1 e Q_2. Siano poi AB i piani (anch' essi passanti per ab) ne' quali sono le coniche comuni a Q_1 e ad una conica qualunque Q del fascio (Q_2, Q_3); dico che le coppie di piani $(A_2B_2, A_3B_3, AB, \ldots)$ sono in involuzione. In fatti, un piano A condotto ad arbitrio per ab segherà Q_1 secondo una conica tangente in a e b a tutte le superficie del fascio (Q_2, Q_3); onde la quadrica di questo fascio passante per un punto arbitrario di quella conica la conterrà per intiero; e questa quadrica segando Q_1 secondo una nuova conica ne individua il piano B. I piani A, B si determinano l' un l' altro nello stesso modo, dunque ha luogo la proprietà enunciata. Fra le superficie del fascio (Q_2, Q_3) c' è quella formata dai piani A_1B_1, per la quale i corrispondenti piani AB coincidono cogli stessi A_1B_1; dunque le tre coppie di piani A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sono in involuzione.

Questo teorema conduce ad una proprietà delle superficie d' ordine qualunque. Date due superficie che si tocchino in un punto a, si cerchino le rette che ivi toccano la curva intersezione di quelle. Evidentemente si può in questa ricerca sostituire a ciascuna superficie una quadrica osculatrice in a, perchè se un piano per a segherà le due quadriche osculatrici secondo curve aventi ivi almeno tre punti coincidenti comuni, avrà luogo un contatto tripunto anche fra le sezioni fatte dallo stesso piano nelle superficie date. Siccome poi una quadrica osculatrice ad una superficie data in un punto dato non è soggetta che a sei condizioni, e quindi può sodisfare a tre altre condizioni arbitrarie, così potremo supporre che le due quadriche si tocchino, non solo in a, ma anche in un altro punto b. Allora le due quadriche si segheranno secondo due coniche i cui piani intersecheranno il piano tangente in a lungo le rette domandate (Olivier *Sur la construction des tangentes en un point multiple etc.* (J. de l'éc. polyt. cah. 21, 1832; p. 307)). Se poi si hanno tre superficie toccantisi in a, il teorema premesso intorno alle quadriche dà come corollario, che *le coppie di tangenti in a alle tre curve nelle quali si segano le superficie prese a due a due, sono in involuzione* (Chasles *Aperçu* Note 10).

zione sarà una curva gobba del terzo ordine (*cubica gobba*), che incontra quella retta in due punti (*). Questa curva si può ottenere come *luogo del punto in cui s'incontrano tre piani corrispondenti di tre fasci projettivi di piani*. Le rette lungo le quali si segano i piani corrispondenti del primo e del secondo fascio formano un iperboloide; così il primo ed il terzo fascio generano un altro iperboloide; e i due iperboloidi, avendo in comune l' asse del primo fascio, si segheranno inoltre secondo una curva (gobba) del terzo ordine.

L' enunciato reciproco esprimerà che due quadriche sono in generale inscritte in una sviluppabile di quarta classe formata dai loro piani tangenti comuni. Ma se le due quadriche hanno una retta comune, i piani tangenti comuni che non passano per questa inviluppperanno una sviluppabile di terza classe, due piani tangenti della quale passano per la retta suddetta (**). Questa sviluppabile può essere ottenuta come *inviluppo del piano che passa per tre punti corrispondenti di tre rette punteggiate projettive*, non situate in uno stesso piano.

Sistemi lineari.

41. Si dimostra per le superficie, come per le curve piane (***), che i gruppi di punti ne' quali una retta arbitraria incontra le superficie di un fascio d' ordine n formano un' involuzione di grado n (†). Questa involuzione ha $2(n-1)$ punti doppi, dunque:

In un fascio d' ordine n vi sono $2(n-1)$ superficie che toccano una retta data

Un piano segherà le superficie d' un fascio secondo curve formanti un altro fascio i cui punti-base saranno le intersezioni del piano trasversale colla curva-base del primo fascio. Ora in un fascio di curve piane d' ordine n ve ne sono $3(n-1)^2$ dotate di punto doppio (††), dunque:

(*) Questa decomposizione della curva di quarto ordine ha luogo quando le due superficie si toccano in due punti situati in una retta (direttrice) comune. Ogni piano passante per questa retta segherà le due quadriche secondo due generatrici (una per ciascuna superficie), e il luogo del punto comune a queste due rette sarà la linea che insieme colla direttrice data forma la completa intersezione delle superficie. Questa linea dovrà adunque essere di terz' ordine ed incontrerà la direttrice nei due punti ove le quadriche si toccano.

(**) Ciò accade quando le due superficie si toccano in due punti di una retta (direttrice) comune. Dunque, se due quadriche passano per una stessa cubica gobba, esse saranno inscritte in una stessa sviluppabile di terza classe, e viceversa.

Per un punto qualunque della retta comune passa una generatrice della prima ed una generatrice della seconda quadrica. Il piano delle due generatrici ha per inviluppo la sviluppabile di terza classe. I piani tangenti di questa corrispondono projettivamente ai punti di una retta. Si noti inoltre che questa sviluppabile non può avere piani doppi o stazionari: perchè il punto in cui un piano così fatto incontra altri due piani tangenti qualunque giacerebbe in quattro piani, il che contraddice all'esser la sviluppabile di terza classe. Dunque le caratteristiche di questa saranno (14)

$$m=3,\ n=3,\ r=4,\ \alpha=0,\ \beta=0,\ g=1,\ h=1,\ x=0,\ y=0.$$

Vedi la mia memoria *Sur les cubiques gauches* (Nouv. Annales de Math. 2. série, t. 1, Paris 1862).

(***) *Introd.* 49.

(†) Viceversa, se le superficie (dello stesso ordine) di una serie semplicemente infinita sono incontrate da qualunque retta in gruppi di punti in involuzione, quelle superficie appartengono ad uno stesso fascio, perchè, in virtù dell' ipotesi, un punto dello spazio giacerà in una sola o in tutte le superficie della serie.

(††) *Introd.* 88.

In un fascio d'ordine n vi sono $3(n-1)^2$ superficie tangenti ad un piano dato.

42. Chiameremo sistema lineare di genere m e d'ordine n la serie (m volte infinita) delle superficie d'ordine n che sodisfanno ad $N(n)-m$ condizioni comuni tali che, presi m punti ad arbitrio nello spazio, per essi passi una sola superficie soggetta alle condizioni predette (*).

Per $m=1, 2, 3$, la serie si chiama ordinatamente fascio, rete e sistema lineare in senso stretto (**).

43. Dalla precedente definizione segue tosto che quelle superficie d'un sistema lineare di genere m, le quali passano per r punti dati ad arbitrio, formano un sistema lineare (minore) di genere $m-r$, compreso nel sistema proposto.

Quelle superficie dello stesso primo sistema, che passano per altri r' punti dati, costituiranno un altro sistema lineare (minore) di genere $m-r'$. Se i due gruppi di r ed r' punti hanno s punti comuni, e se $r+r'-s<m$, le superficie passanti per gli $r+r'-s$ punti distinti formeranno un sistema lineare di genere $m-r-r'+s$, che sarà compreso tanto nel sistema di genere $m-r$ quanto in quello di genere $m-r'$. Se poi $r+r'-s=m$, allora gli $r+r'-s$ punti distinti determineranno una superficie unica che sarà comune ai due sistemi minori di genere $m-r$, $m-r'$ (***).

Un sistema lineare di genere m è determinato da $m+1$ superficie (dello stesso ordine) che non appartengano ad un medesimo sistema lineare di genere inferiore. Siano in fatti $U_1, U_2, \ldots U_{m+1}$ le $m+1$ superficie date, e si cerchi la superficie del sistema che passa pei punti $o_1, o_2, \ldots o_m$. Le coppie di superficie (U_1U_2), (U_1U_3), .. (U_1U_{m+1}) individuano m fasci ne' quali vi saranno m superficie passanti tutte per o_m. Suppongansi che queste m superficie individuino un sistema lineare di genere $m-1$; quella superficie di questo sistema che passa anche per $o_1, o_2, \ldots o_{m-1}$ sarà la domandata. Così è provato il teorema per m purchè sussista per $m-1$; ma esso ha luogo evidentemente per $m=1$, dunque ecc. (†).

(*) Jonquières *Étude sur les singularités des surfaces algébriques* (G. di Liouville, serie 2 t. 7; 1862).

(**) I piani passanti per una retta formano un fascio; i piani passanti per un punto fisso formano una rete; e tutt'i piani nello spazio formano un sistema lineare (in senso stretto).

(***) Di qui si ricava p. e. che due fasci compresi in una rete hanno una superficie comune; che un fascio ed una rete compresi in un sistema lineare (in senso stretto) hanno una superficie comune; che due reti comprese in un sistema lineare (in senso stretto) hanno infinite superficie comuni formanti un fascio; ecc.

(†) Se $U_1=0$, $U_2=0, \ldots U_{m+1}=0$ sono le equazioni delle superficie date, tutte le superficie del sistema saranno rappresentate dall'equazione $k_1U_1+k_2U_2+\ldots+k_{m+1}U_{m+1}=0$, ove le k sono parametri arbitrari. Quest'equazione fa vedere che una superficie qualunque del sistema fa parte del fascio determinato da due superficie, l'una appartenente al sistema lineare (minore) di genere $r-1$, $k_1U_1+k_2U_2+\ldots+k_rU_r=0$, e l'altra al sistema lineare (minore) di genere $m-r$, $k_{r+1}U_{r+1}+k_{r+2}U_{r+2}+\ldots+k_{m+1}U_{m+1}=0$. Ossia, se le superficie date si separano in due gruppi, l'uno di r e l'altro di $m-r+1$ superficie, che individueranno due sistemi lineari minori (di generi $r-1$, $m-r$); e se si prende ad arbitrio una superficie dal primo sistema minore ed una dal secondo, come individuanti un fascio, tutte le superficie del fascio apparterranno al sistema completo; e viceversa, tutte le superficie del sistema completo potranno essere ottenute in questo modo. P. e., fatto $r=1$, si ha che una superficie qualunque del sistema sega $U_1=0$ secondo una curva per la quale passa una superficie del sistema minore individuato dalle $U_2=0$, $U_3=0$, .. $U_{m+1}=0$.

Dalle cose che precedono risulta inoltre che, se in un dato sistema lineare si assumano $r+1$ superficie (non appartenenti ad un sistema di genere $r-1$) come individuanti un sistema di genere r, tutte le superficie di questo sistema apparterranno anche al sistema dato.

É anche evidente che, se le superficie individuanti un sistema lineare hanno un punto co-

44. Due sistemi lineari dello stesso genere m si dicono *projettivi* quando le superficie dell' uno corrispondono alle superficie dell' altro, ciascuna a ciascuna, in modo che alle superficie del primo sistema formanti un sistema minore d' ordine $m-r$ corrispondano superficie del secondo sistema formanti un sistema minore dello stesso ordine $m-r$. I due sistemi minori corrispondenti saranno evidentemente projettivi.

Siccome un fascio è una serie semplicemente infinita di elementi, così la corrispondenza projettiva di due fasci sarà determinata da tre coppie di superficie corrispondenti, date o fissate ad arbitrio (*). In generale, se per due sistemi lineari di genere m si assumano le superficie del primo $U_1, U_2, \ldots U_{m+1}$ (non appartenenti ad un sistema inferiore) come corrispondenti ordinatamente alle superficie del secondo $V_1, V_2, \ldots V_{m+1}$ (del pari non appartenenti ad un sistema minore), e se inoltre, detta u_r una superficie del fascio $(U_r U_{m+1})$ e v_r una superficie del fascio $(V_r V_{m+1})$, si assumano le superficie $u_1, u_2, \ldots u_m$ come corrispondenti alle $v_1, v_2, \ldots v_m$ rispettivamente, la relazione projettiva fra i due sistemi proposti sarà pienamente determinata, cioè ad un' altra superficie qualunque del primo corrisponderà una individuata superficie del secondo sistema. In fatti una superficie qualunque del primo sistema fa parte (43) del sistema minore d' ordine $m-1$ determinato da superficie che appartengono rispettivamente ai fasci $(U_1 U_{m+1})$, $(U_2 U_{m+1})$, .. $(U_m U_{m+1})$. Siano queste superficie le $u_1, u_2, \ldots u_m$. I fasci $(u_r u_s)$, $(U_r U_s)$, appartenendo ad una stessa rete $(U_r U_s U_{m+1})$, hanno una superficie comune alla quale corrisponderà la superficie comune ai fasci $(v_r v_s)$, $(V_r V_s)$. Per tal modo i sistemi minori $(u_1 u_2 \ldots u_m)$, $(v_1 v_2 \ldots v_m)$ sono nelle stesse condizioni supposte pei sistemi dati; cioè il teorema enunciato avrà luogo pei sistemi di genere m, purchè sussista pei sistemi di genere $m-1$. Ma esso si verifica pei fasci, cioè per $m=1$, dunque ecc. (**).

Superficie inviluppanti.

45. Data una serie (semplicemente infinita) di superficie d' ordine n soggette ad $N(n)-1$ condizioni comuni, queste superficie si potranno consi-

---

mune, questo giacerà in tutte le superficie del sistema. Così, per $m=1$, le superficie d' un fascio d' ordine n passano per una stessa curva d' ordine n^2; epperò le superficie di un sistema lineare di genere m, le quali passano per $m-1$ punti dati ad arbitrio, si segano lungo una curva d' ordine n^2. Per $m=2$, le superficie di una rete hanno in generale n^3 punti comuni, epperò le superficie di un sistema di genere m, le quali passano per $m-2$ punti dati ad arbitrio, si segano in altri n^3-m+2 punti. (Diciamo *in generale*, perchè la base di una rete può anche essere una curva, necessariamente d'ordine minore di n^2; p. e. le quadriche passanti per sette punti dati formano una rete e non hanno in generale che un' ottavo punto comune; ma se i sette punti dati giacciono in una cubica gobba, questa sarà situata in tutte le quadriche della rete).

Siccome una rete è individuata da tre superficie, così per gli n^3 punti comuni a tre superficie d' ordine n passano infinite superficie (formanti una rete). Una superficie d' ordine n è individuata da $N(n)$ punti, dunque per $N(n)-2$ punti dati passerà una rete di superficie dello stesso ordine; tre qualunque di queste superficie si segheranno in n^3 punti, compresi i dati, e per questi n^3 punti passeranno infinite superficie dello stesso ordine, cioè tutte quelle che contengono i punti dati. Dunque tutte le superficie d' ordine n che passano per $N(n)-2$ punti dati si segano in altri $n^3-N(n)+2$ punti individuati dai primi. Ossia $N(n)-2$ punti dati ad arbitrio individuano tutt' i punti-base di una rete di superficie d' ordine n. LAMÉ *Examen des differentes méthodes etc.* Paris 1848. — PLÜCKER *Recherches sur les surfaces alg.* (Ann. Gerg. t. 19).

(*) *Introd.* 8.

(**) Supposto che alle superficie $U_1=0$, $U_2=0$, .. $U_{m+1}=0$, $u_1 \equiv U_1+U_{m+1}=0$,

derare come altrettante posizioni di una superficie che varii di sito e di forma nello spazio secondo una data legge (*).

Siano S, S', S'', S''',... superficie consecutive della serie, ossia successive posizioni della superficie mobile; e Σ il luogo di tutte le curve analoghe ad SS', $S'S''$, $S''S'''$,... La superficie Σ è segata da S' lungo le due curve consecutive (infinitamente vicine) SS', $S'S''$, ossia Σ è toccata da S' lungo la curva $S'S''$. A cagione di tale proprietà le superficie S diconsi inviluppate; Σ dicesi inviluppante; ed alle curve secondo le quali si segano due inviluppate successive, cioè alle curve di contatto fra l' inviluppante e le inviluppate, si dà il nome di caratteristiche dell' inviluppante (**).

Quando le superficie S sono piani, Σ è una sviluppabile, e le sue caratteristiche sono le rette generatrici (7).

46. La superficie Σ è evidentemente il luogo di un punto pel quale passino due inviluppate consecutive. Quindi un punto nel quale si seghino due, tre,.. coppie distinte di inviluppate successive, vale a dire due, tre,.. caratteristiche distinte, sarà doppio (biplanare), triplo (triplanare),.. per Σ. Questa superficie avrà dunque in generale una curva doppia o nodale, luogo di un punto ove si seghino due caratteristiche non consecutive, e su questa curva vi sarà un certo numero di punti tripli.

Così sarà uniplanare per Σ un punto nel quale si seghino due caratteristiche consecutive. Questa superficie avrà dunque una curva cuspidale, luogo delle intersezioni delle successive caratteristiche: curva toccata da ciascuna caratteristica nel punto comune a questa ed alla caratteristica successiva.

La curva cuspidale è il luogo di un punto nel quale s' incontrino tre inviluppate successive. Vi potrà essere un certo numero di punti ciascuno dei quali sia situato in quattro inviluppate successive, cioè in tre caratteristiche consecutive; tali punti saranno evidentemente punti stazionari per la curva cuspidale ed apparterranno anche alla curva doppia a cagione dell' incontro della prima colla terza caratteristica. E i punti ne' quali si segano due caratteristiche consecutive ed un' altra non consecutiva saranno punti stazionari della curva doppia e giaceranno anche nella curva cuspidale.

47. Per dare un esempio, la serie delle superficie S sia tale che per un punto qualunque dello spazio passino due di queste superficie. Allora la superficie Σ sarà il luogo de' punti pei quali le due superficie S coincidono. Ciascun punto della superficie Σ essendo situato sopra una sola inviluppata, e precisamente sopra quella che tocca Σ nel punto suddetto, ne segue che tutt' i punti comuni a Σ e ad un' inviluppata sono punti di contatto fra le due superficie. Ma la curva di contatto fra Σ ed una superficie è l' intersezione di questa coll' inviluppata consecutiva, epperò è una curva d' ordine n^2; dunque Σ sarà una superficie d' ordine $2n$. In essa non vi è nè curva doppia nè

$u_2 \equiv U_2 + U_{m+1} = 0$, .. $u_m \equiv U_m + U_{m+1} = 0$ del primo sistema corrispondano le superficie $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, .. $V_{m+1} = 0$, $v_1 \equiv V_1 + V_{m+1} = 0$, $v_2 \equiv V_2 + V_{m+1} = 0$, .. $v_m \equiv V_m + V_{m+1} = 0$ del secondo, due superficie corrispondenti qualunque saranno rappresentate dalle equazioni $k_1 U_1 + k_2 U_2 + .. + k_{m+1} U_{m+1} = 0$, $k_1 V_1 + k_2 V_2 + .. + k_{m+1} V_{m+1} = 0$.

(*) In modo che le successive posizioni della superficie mobile dipendano dai valori che può assumere un parametro variabile.

(**) Monge *App. de l' analyse à la géom.* § VI.

curva cuspidale, perchè nessun punto dello spazio è situato in tre (sole) superficie S.

Tre inviluppate si segano in n^3 punti i quali, non potendo essere situati in un numero finito di superficie della serie, maggiore di 2, saranno necessariamente comuni a tutte le superficie S. In ciascuno di questi punti Σ è toccata dal piano che ivi tocca una qualunque delle inviluppate; dunque tutti quei punti sono doppi per la superficie Σ. E per essi passano non solo le superficie S, ma anche tutte le curve di contatto fra esse e l' inviluppante.

Siccome la curva di contatto fra Σ ed una inviluppata S è l' intersezione di questa superficie coll' inviluppata successiva, così la detta curva (cioè una caratteristica qualunque di Σ) sarà la base d' un fascio di superficie d' ordine n (20). Le curve di contatto di due inviluppate qualisivogliano hanno n^3 punti comuni; quindi la superficie d' ordine n che passa per la prima curva e per un punto arbitrario della seconda avrà con questa n^3+1 punti comuni, cioè la conterrà per intero. Dunque due caratteristiche (non consecutive) della superficie Σ sono situate in una stessa superficie d' ordine n.

Se per una caratteristica di Σ si fa passare una superficie d' ordine n, questa segherà Σ secondo un' altra curva d' ordine n^2. Sia x un punto qualunque di questa curva; la superficie d' ordine n che passa per la caratteristica data e per x contiene anche la caratteristica che passa per x. Dunque ogni superficie d' ordine n che passi per una caratteristica segherà Σ lungo un' altra caratteristica.

Tutte le superficie analoghe, ciascuna delle quali sega Σ secondo due caratteristiche, passeranno per gli n^3 punti doppi dell' inviluppante. Questi punti, risultando dall' incontro di tre superficie d' ordine n, formano la base d' una rete (43). Viceversa ogni superficie di questa rete segherà Σ secondo due caratteristiche. In fatti suppongasi una tal superficie determinata da due punti presi ad arbitrio in Σ; le due caratteristiche che passano per questi punti sono situate in una stessa superficie d' ordine n, dunque ecc. Alla rete appartengono anche le inviluppate S; queste sono le superficie che segano Σ secondo due caratteristiche consecutive.

Superficie gobbe.

48. Una superficie dicesi rigata quando è generata dal movimento di una linea retta; ossia una superficie rigata è una serie semplicemente infinita di rette (generatrici).

Quando due generatrici consecutive sono sempre in uno stesso piano, i punti d' intersezione delle successive generatrici formeranno una curva le cui tangenti saranno le generatrici medesime, ossia la superficie rigata sarà in questo caso una sviluppabile.

Le superficie rigate non sviluppabili diconsi gobbe o rettilinee (*);

(*) Bellavitis *Geometria descrittiva* (Padova 1851) p. 90.

vale a dire, una superficie gobba è un luogo generato da una retta due posizioni successive della quale non siano generalmente in uno stesso piano.

La superficie gobba di second' ordine ammette due sistemi di generatric rettilinee, cioè due serie semplicemente infinite di rette (24).

49. Sia S una data superficie gobba, G una sua generatrice, μ un punto preso ad arbitrio in G; e siano G', G'' le generatrici consecutive a G. La retta G è evidentemente una delle osculatrici alla superficie in μ (16); onde il piano tangente passerà per G, qualunque sia il punto di contatto μ. La retta che passa per μ ed incontra G' e G'', contenendo tre punti infinitamente vicini della superficie sarà la seconda osculatrice e determinerà, insieme con G, il piano M tangente in μ.

Viceversa, un piano qualunque M condotto per G sarà tangente in un punto di questa generatrice. La retta condotta nel piano M in modo che seghi G' e G'', incontrerà G nel punto di contatto μ (*).

Per tal modo è manifesto che, lungo la generatrice G, ciascun punto μ individua un piano unico M e viceversa ogni piano M individua un punto μ. La serie dei punti μ ed il fascio dei piani M sono adunque due forme projettive, epperò il rapporto anarmonico di quattro piani tangenti passanti per una stessa generatrice sarà eguale a quello dei punti di contatto (**).

50. Due superficie gobbe abbiano una generatrice comune G. Un piano M condotto ad arbitrio per G toccherà l' una in un punto μ e l' altra in un altro punto μ'. Variando M, i punti μ, μ' formeranno due punteggiate projettive, nelle quali due punti coincidono coi loro rispettivi corrispondenti; dunque le due superficie si toccheranno in due punti della generatrice comune. Epperò, se esse si toccassero in tre punti di G, i punti μ, μ' coinciderebbero sempre, cioè le due superficie si toccherebbero lungo tutta la generatrice comune (***).

51. Se una superficie gobba è dell' ordine n, una retta arbitraria incontrerà n generatrici, ciascuna delle quali determinerà con quella un piano tangente. Sono adunque n i piani tangenti che si possono condurre per la retta arbitraria; ossia una superficie gobba d' ordine n è della classe n e viceversa (†). Per abbracciare insieme il concetto d' ordine e classe, diremo che una superficie gobba è del grado n quando una retta arbitraria incontra n generatrici.

52. Un piano M, che tocchi una data superficie gobba del grado n in un punto μ, segherà la superficie secondo una generatrice rettilinea G ed una curva d' ordine $n-1$. Questa incontrerà G in μ ed in $n-2$ altri punti, ciascun de' quali, non potendo essere un effettivo punto di contatto fra il pia-

(*) La superficie S e l' iperboloide determinato dalle tre direttrici $GG'G''$ si osculano lungo la retta G; in ogni punto di questa hanno lo stesso piano tangente e le stesse rette osculatrici. Ogni altro iperboloide passante per le rette GG' avrà lungo G un contatto di primo ordine con S (Hachette *Supplément à la géom. descript. de Monge*, 1811).

(**) Chasles *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite etc.* (Correspondance math. et physique de Bruxelles, t. 11).

(***) Hachette l. c.; *Traité de géom. descriptive* (Paris 1822) p. 84.

(†) Cayley *On the theory of skew surfaces* (Camb. a. D. Math. J. t. 7; 1852).

La polare reciproca di una superficie gobba (rispetto ad una quadrica data) è un' altra superficie gobba dello stesso ordine e della stessa classe.

no e la superficie, sarà un punto doppio della superficie medesima, e non cambierà, comunque il piano M giri intorno alla retta G. In fatti la curva d'ordine $n-1$ è il luogo dei punti ove il piano M è incontrato dalle generatrici (tranne G); la generatrice consecutiva a G incontra M nel punto della curva prossimo a quello in cui M è tangente alla superficie; dunque per gli altri $n-2$ punti comuni a G ed alla curva passano altrettante generatrici non consecutive. Un punto ove si segano due generatrici distinte è doppio per la superficie; imperocchè considerando, come si è fatto sopra (49), le generatrici consecutive a ciascuna delle due preaccennate, si trova che in quel punto la superficie ammette due piani tangenti distinti. Oppure, si può osservare che il punto comune a due generatrici non consecutive rappresenta due intersezioni riunite della superficie con qualunque retta passante per esso, perchè questa retta non potrà incontrare che $n-2$ altre generatrici. Dunque la superficie ha una curva doppia incontrata in $n-2$ punti da ciascuna generatrice (*). In ciascun punto di questa curva la superficie ha due piani tangenti che passano rispettivamente per le due generatrici ivi incrociate, e si segano secondo una retta che sarà la tangente della curva doppia medesima.

Dalla proprietà reciproca si trae che i piani contenenti due generatrici non consecutive inviluppano una sviluppabile bitangente (doppiamente circoscritta alla superficie gobba), che ha $n-2$ piani tangenti passanti per ciascuna generatrice della superficie data. Ciascun piano contenente due generatrici (non consecutive) tocca la superficie data in due punti, che sono quelli ne' quali le generatrici anzidette sono incontrate dalla generatrice di contatto fra la sviluppabile bitangente e il detto piano.

53. Una superficie gobba ha in generale alcune generatrici (singolari) incontrate dalle generatrici consecutive. Quando due generatrici consecutive G, G' si incontrano, il piano che le contiene tocca la superficie in tutti i punti di G, come avviene nelle sviluppabili; cioè questo piano può essere considerato come un piano stazionario che ha infiniti punti (parabolici) di contatto succedentisi continuamente sopra una retta. Ogni retta condotta in quel piano è tangente alla superficie in un punto della generatrice G. E il punto GG' potrà risguardarsi come un punto stazionario con infiniti piani tangenti passanti per la retta G; ogni retta passante pel punto GG' è tangente alla superficie in un piano che contiene la retta G. Il numero di questi punti e piani singolari, per una superficie di dato ordine, è finito, epperò questa non ammetterà nè una curva cuspidale nè una sviluppabile osculatrice. Cioè la sezione fatta con un piano qualunque non avrà cuspidi; ed il cono circoscritto avente il vertice in un punto qualunque non avrà piani stazionari.

In certi casi particolari la superficie ha anche delle generatrici doppie. Una tal generatrice rappresenta due generatrici coincidenti per qualunque piano passante per essa; ogni retta che la seghi incontra ivi la superficie in due punti coincidenti.

(*) Cayley l. c. In vece degli $n-2$ punti doppi sopra ciascuna generatrice, si potrà in certi casi avere un equivalente numero di punti tripli, quadrupli; ecc. Cioè la curva doppia potrà essere surrogata da un'equivalente curva di più alta moltiplicità.

La classe di un cono circoscritto è (33) uguale a quella della superficie data, cioè n. Dunque, se d è il numero de' piani bitangenti del cono, ossia il numero de' piani passanti pel vertice e contenenti due generatrici della superficie data, l'ordine del cono sarà $n(n-1)-2d$. Ma l'ordine del cono è evidentemente uguale alla classe della curva che si ottiene segando la superficie gobba con un piano passante pel vertice del cono; e la classe di questa curva è $n(n-1)-2\delta$, ove δ sia il numero dei suoi punti doppi. Dunque $d=\delta$, cioè la classe della sviluppabile bitangente di una superficie gobba è uguale all'ordine della curva doppia (*).

54. Due linee curve (piane o gobbe) si diranno punteggiate projettivamente quando i punti dell'una corrispondano, ciascuno a ciascuno, ai punti dell' altra; per modo che le due curve si possano supporre generate simultaneamente dal movimento di due punti, e ad una posizione qualunque del primo o del secondo mobile corrisponda una sola posizione del secondo o del primo.

Suppongasi ora che siano date in due piani P', P'' due curve punteggiate projettivamente; sia n' l'ordine della prima, δ' il numero de' punti doppi con tangenti distinte e $\varkappa'$ il numero de' punti doppi con tangenti coincidenti (cuspidi); n'', δ'', $\varkappa''$ i numeri analoghi per la seconda curva (**). Quale sarà il grado della superficie gobba, luogo della retta che unisce due punti corrispondenti x', x'' delle due curve? ossia quante rette $x'x''$ sono incontrate da una retta qualunque R? Un piano condotto ad arbitrio per R segherà la prima curva in n' punti x', ai quali corrisponderanno altrettanti punti x'' situati generalmente in n' piani diversi del fascio R. Viceversa un piano arbitrario per R segherà la seconda curva in n'' punti x'' ai quali corrisponderanno n'' punti x' situati in altrettanti piani per R. Per tal modo si vede che a ciascuna posizione del piano Rx' ne corrispondono n' del piano Rx'' e che a ciascuna posizione del piano Rx'' ne corrispondono n'' del piano Rx'. Vi saranno pertanto $n'+n''$ coincidenze di due piani corrispondenti Rx', Rx'', cioè per R passano $n'+n''$ piani ciascun de' quali conterrà due punti corrispondenti delle due curve. Dunque il grado della superficie gobba, luogo delle rette $x'x''$, è $n'+n''$. (Evidentemente la dimostrazione e la conclusione non cambiano se in luogo di due curve piane si assumano due curve gobbe, ovvero una curva gobba ed una curva piana, i cui ordini siano n', n'').

La curva (n'') incontra il piano P' in n'' punti x'', e le rette che li uniscono ai loro corrispondenti punti x' saranno altrettante generatrici della superficie. Il piano P', contenendo n'' generatrici, è tangente in n'' punti (uno per ciascuna generatrice), e la sezione da esso fatta nella superficie è composta di quelle n'' rette e della curva (n'). Questa sezione ha $n'n''+\frac{n''(n''-1)}{2}+\delta'+\varkappa'$ punti doppi; sottratti gli n'' punti di contatto, il nume-

---

(*) CAYLEY l. c.

(**) Se vi è un punto $(r)^{plo}$ si conterà per $\frac{r(r-1)}{2}$ punti doppi.

ro residuo $n'n'' + \frac{n''(n''-3)}{2} + \delta' + \varkappa'$ esprimerà l' ordine della curva doppia della superficie. Analogamente, considerando la sezione fatta dal piano P'', otterremo l' ordine della curva doppia espresso da $n''n' + \frac{n'(n'-3)}{2} + \delta'' + \varkappa''$. Dunque dovrà essere identicamente $\frac{n''(n''-3)}{2} + \delta' + \varkappa' = \frac{n'(n'-3)}{2} + \delta'' + \varkappa''$, ossia $\frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - (\delta' + \varkappa') = \frac{(n''-1)(n''-2)}{2} - (\delta'' + \varkappa'')$. Se denominiamo genere della curva (n') il numero $\frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - (\delta' + \varkappa')$, potremo concludere che due curve piane punteggiate projettivamente sono dello stesso genere. Siccome dalle formole di Plücker si ha $\frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - (\delta' + \varkappa') = \frac{(m'-1)(m'-2)}{2} - (\tau' + \iota')$ . . . . . (*) (ove m' esprima la classe della curva (n'), τ' il numero delle sue tangenti doppie ed ι' quello delle stazionarie), così il genere della curva sarà anche espresso da $\frac{(m'-1)(m'-2)}{2} - (\tau' + \iota')$.

È evidente che due sezioni piane di una stessa superficie gobba sono punteggiate projettivamente (assumendo come corrispondenti i punti situati sopra una stessa generatrice), epperò saranno anche curve dello stesso genere. Se la superficie è d' ordine n ed ha una curva doppia il cui ordine sia δ, il genere di una sezione piana qualunque sarà $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$; dunque, se una superficie gobba è del grado n e del genere p (cioè se p è il genere di una sezione piana), l' ordine della curva gobba sarà $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$. Questo numero non può mai essere minore di $n-2$, questo essendo il numero de' punti in cui la curva gobba è incontrata da ciascuna generatrice. Anzi, se la superficie non ha una retta doppia per la quale debbano passare i piani che contengono due generatrici distinte, l' ordine della curva gobba sarà almeno $2n-5$, perchè due generatrici che s' incontrano contengono questo numero di punti doppi.

55. Chiameremo genere di una curva gobba il genere di una sua prospettiva. Se n è l' ordine della curva, h il numero de' suoi punti doppi apparenti ed attuali, e β quello de' punti stazionari, la prospettiva (**) è una curva d' ordine n, dotata di h punti doppi e β cuspidi, cioè una curva del genere $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - (h + \beta)$. Dalle formole di Cayley si ha (***)

(*) Questa eguaglianza può anche risguardarsi come una conseguenza del teorema qui dimostrato, perchè gli è evidente che due curve piane reciproche sono punteggiate projettivamente.

(**) Cioè una sezione piana di un cono prospettivo alla curva gobba (12).

(***) Dove i simboli m, r, α, g, x, y hanno lo stesso significato dichiarato altrove (10, 12).

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(h+\beta)=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-(g+\alpha)$$

$=\frac{(r-1)(r-2)}{2}-(y+m)=\frac{(r-1)(r-2)}{2}-(x+n)$; queste sono adunque altrettante espressioni del genere della curva gobba.

Siccome una curva gobba è evidentemente punteggiata projettivamente alla sua prospettiva, così potremo concludere che due curve qualisivogliano (piane o gobbe) le quali siano punteggiate projettivamente sono sempre dello stesso genere (*).

La divisione delle curve piane e gobbe, e per conseguenza dei coni e delle sviluppabili (e delle superficie gobbe come serie di rette) in generi, proposta dal prof. Clebsch, è della massima importanza. Per essa si ravvicinano e si connettono le proprietà di forme geometriche in apparenza differentissime. Ciò che dà la misura delle difficoltà che può offrire lo studio di una serie semplicemente infinita di elementi (punti, rette, piani) non è l' ordine o la classe, ma bensì il genere (**).

56. Le più semplici fra le superficie gobbe sono quelle di genere 0. Detto n il grado della superficie, l' ordine della curva nodale sarà $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; epperò una sezione piana qualunque della superficie avrà il massimo numero di punti doppi che possa esistere in una curva piana. Per un punto qualunque x della sezione piana passa una generatrice che va ad incontrare la curva

---

(*) Clebsch *Ueber die Singularitäten algebraischer Curven* (G. di Crelle, t. 64; 1865).

(**) Una curva piana è di genere 0 quando $\delta+\varkappa=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, cioè quando essa ha il massimo numero di punti doppi (*Introd.* 35). In questo caso i punti della curva si possono ottenere ad uno ad uno mediante le curve di un fascio d' ordine $n-1$. In fatti i punti doppi ed altri $2n-3$ punti fissati ad arbitrio nella curva formano insieme un sistema di $\frac{(n-1)(n+2)}{2}-1$ punti, epperò determinano (*Introd.* 41) la base d' un fascio d' ordine $n-1$; ogni curva del quale segherà la curva data in un solo nuovo punto. La curva, in virtù delle formole di Plücker, sarà della classe $2(n-1)-\varkappa$ ed avrà $3(n-2)-2\varkappa$ flessi e $2(n-3)(n-2-\varkappa)-\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2}$ tangenti doppie. Donde segue che una curva d' ordine n non può avere più di $\frac{3(n-2)}{2}$ cuspidi. Clebsch *Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind* (G. di Crelle, t. 64).

Siccome le curve d' un fascio si possono far corrispondere, ciascuna a ciascuno, ai singoli punti di una retta, così una curva di genere 0 può essere considerata come punteggiata projettivamente ad una retta. Ciò sussiste anche se la curva è gobba, perchè a questa si può sempre sostituire la sua prospettiva. Ciò dà luogo a molte conseguenze importanti; p. e. se in una curva di genere 0 vi sono due serie di punti corrispondenti tali che ad un punto qualunque della prima serie corrispondano a punti della seconda e ad un punto qualunque della seconda corrispondano a' punti della prima, sarà $a+a'$ il numero de' punti in ciascun de' quali coincidono due punti corrispondenti; ossia, detto in breve, se in una curva di genere 0 vi sono due serie di punti colla corrispondenza (a, a'), il numero de' punti uniti è $a+a'$. Per dimostrare questo teorema basta osservare che esso ha luogo per una retta punteggiata projettivamente alla curva data. Cayley *Note sur la correspondance de deux points sur une courbe* (Compte rendu 12 mars 1866).

doppia in $n-2$ punti, da ciascun de' quali parte un' altra generatrice; sia x' il punto in cui questa incontra la sezione piana. Al punto x corrispondono adunque $n-2$ punti x'; e similmente un punto x' determinerà $n-2$ punti, uno de' quali sarà x. Abbiamo così nella sezione piana, che è una curva di genere 0, due serie di punti colla corrispondenza $(n-2, n-2)$, epperò vi saranno $2(n-2)$ punti uniti, cioè nella curva gobba vi saranno $2(n-2)$ punti cuspidali della superficie (punti pei quali le due generatrici coincidono). Ossia vi sono $2(n-2)$ generatrici ciascuna delle quali è incontrata dalla generatrice consecutiva.

57. In seguito avremo occasione di trattare con qualche estensione la teoria delle superficie gobbe generate da una retta che si muova incontrando tre linee (direttrici) date (*), ovvero incontrando due volte una curva ed una volta un' altra direttrice, ovvero incontrando tre volte una curva data. Per ora limitiamoci al caso di una superficie gobba di grado n che abbia due direttrici rettilinee A, B. Sia K la curva d' ordine n che si ottiene tagliando la superficie con un piano fissato ad arbitrio; la superficie sarà il luogo delle rette appoggiate alle linee (direttrici) A, B, K. Le rette A, B saranno multiple sulla superficie secondo certi numeri r, s; epperò i punti a, b, dove esse incontrano K, saranno multipli secondo r, s per questa curva. Le rette che passano per un punto ξ di A ed incontrano B sono in un piano; quelle che uniscono ξ coi punti di K formano un cono d' ordine n, pel quale la retta ξb è una generatrice $(s)^{pla}$. Questo cono e quel piano avranno altre $n-s$ rette comuni, che sono altrettante generatrici della superficie gobba, passanti per ξ. Dunque $r=n-s$.

Ogni piano condotto per A segherà K in s punti (oltre ad a), ossia segherà la superficie secondo r generatrici che, dovendo incontrare B, passeranno per uno stesso punto. Parimenti, ciascun piano per B segherà la superficie secondo r generatrici incrociate in uno stesso punto di A. Le generatrici che partono da uno stesso punto ξ di A incontrano K in r punti x, x',.. situati in una retta X passante per b; così che i punti ξ di A corrispondono projettivamente alle rette X ovvero ai gruppi di punti x contenuti in queste rette. A ciascun punto ξ di A corrispondono r punti x di K, in linea retta con b; ma al punto a di A corrisponderanno r punti coincidenti nel punto stesso a (perchè il piano di K non contiene alcuna generatrice della superficie); cioè al punto $\xi=a$ corrisponde la retta $X=ba$. Alle tangenti degli s rami di K incrociati in b corrisponderanno i punti dove A è incontrata dalle generatrici uscenti da b.

Viceversa, avendosi una curva piana K d' ordine n dotata di un punto $(r)^{plo}$ a e di un punto $(s)^{plo}$ b (dove $r+s=n$), ed una retta A appoggiata a K in a, i punti ξ della quale corrispondano projettivamente alle rette X situate nel piano di K e concorrenti in b; e supposto che al punto $\xi=a$ corrisponda la retta $X=ba$; quale sarà il luogo delle rette ξx che congiungono i punti di A con quelli dove K è segata dalle corrispondenti rette X? Una retta arbitraria T si assuma come asse di un fascio di piani passanti pei di-

---

(*) Per queste superficie sono generatrici doppie le rette che incontrano due volte una direttrice ed una volta ciascuna delle altre due linee date; ecc.

versi punti ξ di A; questo fascio ed il fascio delle corrispondenti rette X, essendo projettivi, genereranno coll' intersecarsi de' raggi corrispondenti una conica, che passerà per a e per b, epperò incontrerà K in altri $2n - r - s = n$ punti x. Congiungendo x col punto ξ di A che corrisponde al raggio $X = bx$, si ha una retta situata nel piano $T\xi$; dunque la superficie cercata è del grado n. Ogni piano per A sega K in a ed in altri s punti x ai quali corrispondono ordinatamente il punto a ed altri s punti ξ di A; le due serie di punti sono projettive e due punti corrispondenti coincidono; dunque le rette ξx concorreranno in un punto fisso y del piano. Quando il piano passa per ab, il punto y cade in b; dunque la superficie ha (oltre ad A) un' altra direttrice rettilinea, multipla secondo s, che passa pel punto b.

Supponiamo ora che la retta R si avvicini infinitamente ad A, epperò il punto b al punto a. Supposto r non minore di s, fra gli r rami di K incrociati in a ve ne saranno s passanti anche per b, e conseguentemente toccati dalla retta ab (*). In questo caso i punti ξ di A corrispondono projettivamente alle rette X tracciate per a nel piano di K; il punto a corrisponde alla retta ab; e la superficie è ancora il luogo delle rette che dai punti ξ vanno ai punti x ove K è incontrata dalle corrispondenti rette X. Ciascun piano per A contiene s generatrici concorrenti in uno stesso punto della direttrice A, che è una linea $(r)^{pla}$ per la superficie; donde segue che per un punto qualunque di A vi sono $r - s$ generatrici coincidenti in A, e per ciascuno degli $r - s$ punti di A che corrispondono alle tangenti dei rami di K non toccati da ab, $r - s + 1$ generatrici coincidono in A.

Viceversa, data una curva piana K d' ordine $n = r + s$, dotata di un punto $r(+s)^{plo}$ a, e data una retta A i cui punti ξ formino una punteggiata projettiva al fascio delle rette X condotte per a nel piano di K, in modo che al punto $\xi = a$ corrisponda la retta ab che in a tocca s rami di K (ed ha ivi $r + s$ punti coincidenti comuni colla curva); il luogo delle rette ξx che uniscono i punti di A ai punti ove K è incontrata dai corrispondenti raggi X sarà una superficie del grado n. In fatti, assunta una trasversale arbitraria T, si otterrà, come nel caso generale, una conica che, passando per a e toccando ivi ab, incontrerà K solamente in altri n punti x (**).

In entrambi i casi (siano cioè le direttrici A, B distinte o coincidenti) la superficie gobba è del genere $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{r(r-1)}{2} - \frac{s(s-1)}{2} =$ $(r-1)(s-1)$. Ma questo numero si potrà abbassare quando la curva K abbia altri punti multipli, epperò la superficie abbia generatrici multiple.

(*) Si ha così un punto multiplo a pel quale passauo r rami della curva, ma che equivale ad $\frac{r(r-1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2}$ puoti doppi, perchè nasce dall' avvicinamento di un punto $(r)^{plo}$ e di un punto $(s)^{plo}$; il sig. Cayley lo chiama punto $r(+s)^{plo}$, per distinguerlo da un puoto $(r+s)^{plo}$.

(**) Cayley *Second memoir on skew surfaces, otherwise scrolls* (Phil. Traos. 1864 p. 559).

Facendo $n = 3$ (epperò $r = 2$, $s = 1$), si ha il più semplice esempio delle superficie qui considerate. La superficie gobba di terzo grado ha in generale due direttrici rettilinee, una delle quali è una retta doppia; ma le due direttrici possono anche coincidere in una retta unica (*).

(*) *Sulle superficie gobbe del terz' ordine* (Atti del R. Istituto Lomb. Milano 1861) — *Sur les surfaces gauches du troisième degré* (G. di Crelle t. 60; 1861). Cfr. Philosophical Transactions 1863; p. 241.

Quando una superficie non gobba d' ordine n contiene una retta R, un piano condotto ad arbitrio per R è generalmente tangente in $n - 1$ punti diversi, i quali sono gli incontri di R colla curva che con R forma la completa intersezione della superficie col piano. Variando il piano intorno ad R, gli $n - 1$ punti di contatto generano un' involuzione di grado $n - 1$, i cui punti doppi sono evidentemente punti parabolici della superficie (perchè in ciascuno di essi il piano tangente tocca la superficie in due punti consecutivi). Se due superficie non gobbe d' ordini n, n', hanno una retta R comune, avremo in questa due involuzioni projettive, assunti come corrispondenti i punti in cui le due superficie sono toccate da uno stesso piano. Le due involuzioni hanno (*Introd.* 24 b) $n + n'$ punti comuni, cioè le due superficie si toccano in $n + n'$ punti di R, epperò si intersecano secondo una linea che incontra R in questi $n + n'$ punti. Applicando questo risultato ad una superficie (non gobba) d' ordine n che passi per n generatrici del medesimo sistema di un iperboloide, troviamo che la rimanente intersezione di queste due superficie sarà una linea d' ordine n appoggiata in n punti a ciascuna di quelle n generatrici. Dunque la superficie data sega inoltre l' iperboloide secondo n generatrici dell' altro sistema: teorema dovuto al sig. Moutard (cfr. Poncelet *Propriétés projectives*, annot. de la 2. éd. (Paris 1865, p. 418.). Reciprocamente, lo stesso teorema sussiste per una superficie (non gobba) di classe n.

PARTE SECONDA

Superficie polari relative ad una superficie d' ordine qualunque.

61. Sia data una superficie (fondamentale) qualsivoglia F_n d' ordine n, e sia o un punto fissato ad arbitrio nello spazio. Se intorno ad o si fa girare una trasversale che in una posizione qualunque incontri F_n in n punti $a_1 a_2 .. a_n$, il luogo de' centri armonici di grado r del sistema $a_1 a_2 .. a_n$ rispetto al polo o sarà una superficie d' ordine r, perchè essa ha r punti sopra ogni trasversale condotta per o. Tale superficie si dirà polare $(n-r)^{ma}$ del punto o rispetto alla superficie fondamentale F_n (*).

Ovvero: se intorno ad o si fa girare un piano trasversale che in una posizione qualunque seghi F_n secondo una curva C_n d' ordine n, la polare $(n-r)^{ma}$ di o rispetto a C_n sarà un' altra curva d' ordine r, ed il luogo di questa curva sarà una superficie d' ordine r: la polare $(n-r)^{ma}$ di o rispetto ad F_n (**).

Per tal modo dal punto o si desumono n superficie polari relative alla superficie data. La prima polare è una superficie d' ordine $n-1$; la seconda polare è d' ordine $n-2$; ... ; la penultima polare è una superficie di second' ordine (quàdrica polare); e l' ultima od $(n-1)^{ma}$ polare è un piano (piano polare).

62. Dal noto teorema (***) « se m è un centro armonico di grado r del sistema $a_1 a_2 .. a_n$ rispetto al polo o, viceversa o è un centro armonico di grado $n-r$ dello stesso sistema $a_1 a_2 .. a_n$ rispetto al polo m » segue:

Se m è un punto della superficie $(n-r)^{ma}$ polare di o, viceversa o è situato nella superficie r^{ma} polare di m.

Ossia:

Il luogo di un polo la cui polare r^{ma} passi per un dato punto o è la polare $(n-r)^{ma}$ di o.

(*) Grassmann. *Theorie der Centralen* (G. di Crelle t. 24; 1842) p. 272. — *Introd.* 68.

(**) Se F_n è un cono ed il polo è un punto diverso dal vertice, facendo passare un piano trasversale pel polo e pel vertice, è evidente che qualunque superficie polare sarà un cono collo stesso vertice del cono dato (4).

(***) *Introd.* 12.

Per esempio: la prima polare di o è il luogo di un punto il cui piano polare passi per o; la seconda polare di o è il luogo di un punto la cui quadrica polare passi per o; ecc. E viceversa il piano polare di o è il luogo di un punto la cui prima polare passi per o; la quadrica polare di o è il luogo di un punto la cui seconda polare passi per o; ecc.

63. Dal teorema (*) « se $m_1 m_2 .. m_r$ sono i centri armonici di grado r del sistema $a_1 a_2 .. a_n$ rispetto al polo o, i due sistemi $a_1 a_2 .. a_n$ ed $m_1 m_2 .. m_r$ hanno, rispetto al detto polo, gli stessi centri armonici di grado s, ove $s < r$ » segue:

Un polo qualunque ha la stessa polare rispetto alla superficie data e rispetto ad ogni superficie polare d'ordine più alto, dello stesso polo, considerata come superficie fondamentale.

O in altre parole: per un dato polo, la polare s^{ma} relativa alla polare s'^{ma} coincide colla polare $(s+s')^{ma}$ relativa alla superficie fondamentale.

P. e. il piano polare di o rispetto ad F_n coincide col piano polare relativo alla $(n-2)^{ma}$, $(n-3)^{ma}$, $(n-4)^{ma}$, ... polare dello stesso polo; ..; la seconda polare di o rispetto ad F_n è la prima polare di o rispetto alla prima polare del medesimo punto; ecc.

64. Se il polo o è situato nella superficie fondamentale, talchè esso tenga le veci di uno degli n punti d'intersezione $a_1 a_2 .. a_n$ (61), il centro armonico di primo grado si confonderà con o. Ma se la trasversale è tangente ad F_n in o, due de' punti $a_1 a_2 .. a_n$ sono riuniti in o; onde, riuscendo indeterminato il centro armonico di primo grado, può assumersi come tale ciascun punto della trasversale (**). Ora il luogo delle rette tangenti ad F_n in o è un piano (quando o non sia un punto multiplo), dunque:

Il piano polare di un punto della superficie fondamentale è il piano tangente alla superficie in quel punto.

65. Se il polo non è situato in F_n, ma la trasversale sia tangente a questa superficie, due de' punti $a_1 a_2 .. a_n$ coincideranno nel punto di contatto, epperò questo sarà uno dei centri armonici di grado $n-1$ (***), ossia un punto della prima polare. Dunque:

La prima polare di un punto qualunque o sega la superficie fondamentale nella curva di contatto fra questa ed il cono circoscritto di vertice o.

La prima polare è una superficie d'ordine $n-1$, dunque segherà F_n lungo una curva d'ordine $n(n-1)$. Questo numero esprime pertanto anche l'ordine del cono circoscritto (†).

66. La classe di F_n è il numero de' piani tangenti che si possono condurre a questa superficie per una retta qualunque oo', ossia il numero de' pia-

---

(*) *Introd.* 13.
(**) *Introd.* 17, 70.
(***) *Introd.* 16.
(†) Monge, *App. de l'analyse à la géom.* § 3. Cfr. Corresp. sur l'éc. polyt. t. 1 (1806) p. 108.

ni che passano per o' e toccano il cono circoscritto di vertice o. In altre parole, la classe di F_n è la classe di un suo cono circoscritto avente il vertice in un punto arbitrario dello spazio.

I punti di contatto dei piani tangenti che passano pei punti o, o' saranno situati nelle prime polari d' entrambi questi poli. Ora queste prime polari ed F_n, essendo tre superficie d'ordini $n-1$, $n-1$, n, hanno $n(n-1)^2$ punti comuni; dunque (*):

Una superficie d' ordine n è in generale della classe $n(n-1)^2$.

67. Se una retta condotta pel polo o oscula in m la superficie fondamentale, la stessa retta sarà tangente in m alla prima polare di o, onde anche la seconda polare di questo punto passa per m (**). Viceversa, è evidente che, se m è un punto comune ad F_n ed alle polari prima e seconda di o, la retta om osculerà F_n in m. Dunque le rette che da o si possono condurre ad osculare F_n sono tante quanti i punti comuni ad F_n ed alle polari prima e seconda di o, ossia $n(n-1)(n-2)$. Queste rette sono manifestamente generatrici stazionarie del cono circoscritto.

Sapendosi ora che il cono circoscritto è dell' ordine $n(n-1)$, della classe $n(n-1)^2$ ed ha $n(n-1)(n-2)$ generatrici cuspidali, in virtù delle note formule di Plücker (3) possiamo conchiudere che il medesimo cono avrà

$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ generatrici doppie,

$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$ piani bitangenti, e $4n(n-1)(n-2)$ piani tangenti stazionari. Dunque:

Per un punto qualunque o si possono condurre alla superficie F_n $n(n-1)(n-2)$ rette osculatrici,

$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ rette bitangenti (tangenti in due punti distinti),

$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$ piani bitangenti (tangenti in due punti distinti), e $4n(n-1)(n-2)$ piani tangenti stazionari (tangenti in due punti infinitamente vicini).

68. I punti parabolici formano su F_n una certa curva (curva parabolica) che sarà incontrata dalla prima polare del punto o ne' punti ove F_n è toccata dai piani stazionari che passano per o. Dal numero di questi piani consegue che la curva parabolica è incontrata dalla prima polare di o in $4n(n-1)(n-2)$ punti; dunque:

La curva parabolica è dell' ordine $4n(n-2)$. Così, dal numero dei piani bitangenti che passano per o si conclude che

(*) Poncelet, *Mém. sur la théorie générale des polaires réciproques* (G. Crelle t. 4, p. 30).
(**) *Introd.* 80.

La curva luogo dei punti di contatto fra F_n ed i suoi piani bitangenti è dell' ordine $n(n-2)(n^3-n^2+n-12)$.

Dagli stessi numeri sopra considerati si deduce inoltre che

I piani tangenti stazionari di F_n inviluppano una sviluppabile della classe $4n(n-1)(n-2)$; ed i piani bitangenti inviluppano un' altra sviluppabile della classe

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12).$$

69. Se il polo o è preso nella superficie fondamentale F_n, qualunque sia la trasversale condotta per o, una delle intersezioni $a_1 a_2 .. a_n$ coincide con o, e per conseguenza o sarà un centro armonico, di ciascun grado, del sistema $a_1 a_2 .. a_n$ rispetto al polo o. Dunque tutte le polari di o passano per questo punto.

Se la trasversale condotta per o è ivi tangente ad F_n, due dei punti $a_1 a_2 .. a_n$ coincidono in o, epperò questo punto farà le veci di due centri armonici di qualunque grado (*); ossia ogni retta tangente in o a F_n è tangente nello stesso punto a tutte le polari di o.

Inoltre, se la trasversale condotta per o è una delle due rette che ivi osculano F_n, tre centri armonici di ogni grado cadranno in o. Dunque:

Se il polo è nella superficie fondamentale, questa e tutte le superficie polari hanno ivi lo stesso piano tangente e le stesse rette osculatrici (**).

Donde segue che le due rette osculatrici a F_n in o sono le generatrici, incrociate in questo punto, della quadrica polare di o. Se o é un punto parabolico, le due rette osculatrici coincidono, epperò:

La quadrica polare di un punto parabolico è un cono tangente al relativo piano stazionario, e la generatrice di contatto é la retta che in quel punto oscula la superficie fondamentale.

Si vede inoltre che un punto parabolico della superficie fondamentale ha la proprietà d' essere parabolico anche per tutte le polari del punto medesimo.

70. Se, sopra una trasversale, il polo o coincide con uno de' punti $a_1 a_2 .. a_n$, p. e. con a_1, i centri armonici di grado $n-1$ del sistema (rispetto al polo anzidetto) sono il punto a_1 ed i centri armonici del sistema minore $a_2 ... a_n$, rispetto al polo medesimo (***). Donde segue che, se il polo o è nella superficie fondamentale, la prima polare è il luogo dei centri armonici di grado $n-2$ del sistema di $n-1$ punti in cui F_n è segata (oltre ad o) da una trasversale qualunque condotta per o, ed analogamente la polare r^{ma} di o è il

(*) *Introd.* 17.

(**) In virtù dello stesso teorema sui centri armonici (*Introd.* 17), se una retta ha colla superficie fondamentale un contatto m*punto*, essa avrà lo stesso contatto e nel medesimo punto con qualunque polare del punto di contatto.

(***) *Introd.* 17.

luogo dei centri armonici, di grado $n-r-1$, del sistema di $n-1$ punti anzidetto.

Le rette, che da o si possono condurre a toccare F_n altrove, formano un cono dell' ordine $n(n-1)-2$; in fatti, un piano condotto arbitrariamente per o, sega F_n secondo una curva (d' ordine n) alla quale si possono condurre da o (*) appunto $n(n-1)-2$ tangenti (oltre alla retta tangente in o). Ciò torna a dire che il cono circoscritto il quale è in generale dell' ordine $n(n-1)$, se il vertice o cade nella superficie fondamentale, si decompone nel piano tangente ad F_n in o (contato due volte) ed in un cono effettivo d' ordine $n(n-1)-2$. Questo cono è l' inviluppo dei piani che toccano F_n ne' punti comuni a questa superficie ed alla prima polare di o. Ma queste due superficie si toccano in o ed hanno ivi le stesse rette osculatrici; dunque la curva d' intersezione di F_n colla prima polare di o, ossia la curva di contatto fra F_n ed il cono circoscritto di vertice o ha due rami incrociati in o, toccati ivi dalle due rette che nel punto stesso osculano F_n.

Ne segue che il piano tangente ad F_n in o è tangente al cono circoscritto lungo le due rette osculatrici, come si è già trovato altrimenti (33). Il piano ed il cono avranno inoltre $n(n-1)-2-2.2=(n-3)(n+2)$ rette comuni; dunque fra le rette tangenti ad F_n in o ve ne sono $(n-3)(n+2)$ che toccano F_n anche altrove.

Se tre superficie si toccano in un punto ed hanno ivi le stesse rette osculatrici, quel punto equivale a sei intersezioni riunite (**), dunque la superficie fondamentale e le polari prima e seconda di o avranno, oltre a questo punto, $n(n-1)(n-2)-6$ intersezioni comuni; vale a dire per o passano $(n-3)(n^2+2)$ rette che osculano F_n altrove.

Il cono circoscritto di vertice o, essendo dell' ordine $(n+1)(n-2)$ e della classe $n(n-1)^2$, ed avendo $(n-3)(n^2+2)$ generatrici cuspidali, avrà, per le formole di Plücker (3),

$\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$ generatrici doppie,

$4n(n-1)(n-2)$ piani tangenti stazionari, ed

$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$ piani bitangenti (oltre al piano che tocca F_n in o). Questi numeri fanno conoscere quante rette si possono condurre per o a toccare altrove F_n in due punti distinti; quanti piani stazionari e quanti piani bitangenti passano per o.

71. Se F_n ha un punto $(s)^{plo}$ δ, e si prende questo come polo, una trasversale condotta arbitrariamente per δ sega ivi la superficie in s punti riuniti; s centri armonici di qualunque grado cadono in δ, epperò questo punto sarà multiplo secondo s per ciascuna polare del punto medesimo (***). Don-

(*) *Introd.* 17.
(**) Ciò si fa evidente sostituendo ad una delle tre superficie il piano tangente.
(***) *Introd.* 17, 72.

de segue (18) che la polare $(n-s)^{ma}$ di δ sarà un cono d'ordine s col vertice in δ, e che le polari d'ordine inferiore dello stesso punto riescono indeterminate.

Tirando per δ una trasversale che abbia ivi un contatto $(s+1)^{punto}$ con F_n, i centri armonici di grado s sono indeterminati, cioè la trasversale giace per intero nella polare $(n-s)^{ma}$. E se la trasversale ha in δ un contatto $(s+2)^{punto}$ con F_n, saranno indeterminati sì i centri armonici di grado s che quelli di grado $s+1$, epperò la trasversale sarà situata in entrambe le polari $(n-s)^{ma}$ ed $(n-s-1)^{ma}$ del punto δ.

Di quest' ultima specie di trasversali il numero è $s(s+1)$, ossia le due polari anzidette si segano secondo $s(s+1)$ rette. In fatti, se p è un punto comune alle due polari e diverso da δ, la retta δp giacerà non solamente nella polare $(n-s)^{ma}$ perchè questa è un cono di vertice δ, ma eziandio nella polare $(n-s-1)^{ma}$ perchè avrà con essa $s+2$ punti comuni (*). Dunque:

Allorquando una superficie (fondamentale d'ordine n) ha un punto multiplo secondo il numero s, il luogo delle rette che hanno ivi con quella un contatto $(s+1)^{punto}$ è il cono d'ordine s, polare $(n-s)^{ma}$ di quel punto. Vi sono poi $s(s+1)$ rette che hanno ivi colla superficie $s+2$ punti coincidenti comuni; esse formano l'intersezione dell'anzidetto cono colla polare $(n-s-1)^{ma}$ del punto.

Viceversa, se la polare $(n-s)^{ma}$ di un punto δ è un cono di vertice δ (e d'ordine s) il punto δ sarà multiplo secondo s per la superficie fondamentale. In fatti, tirata per δ una trasversale arbitraria, si avrebbero i centri armonici di grado s tutti riuniti in δ, il che non può accadere se non quando nel polo coincidono s punti dal sistema $a_1 a_2 \ldots a_n$ (**).

Se la polare $(n-s+1)^{ma}$ (e per conseguenza anche ogni altra polare d'ordine minore) di un polo δ è indeterminata, la polare $(n-s)^{ma}$ sarà un cono di vertice δ. Perchè, tirata una trasversale per δ, ciascun punto di questa sarebbe un centro armonico di grado $s-1$; il che non può accadere se in δ non sono riuniti tutt' i centri armonici di grado s.

72. Se dei punti $a_1 a_2 \ldots a_n$ ve ne sono s riuniti nel polo δ, e se i rimanenti si designano con $a_1 a_2 \ldots a_{n-s}$, è noto (***) che i centri armonici di grado $r-s$ (dove $r > s$) del sistema $a_1 a_2 \ldots a_{n-s}$, rispetto al polo δ, insieme col punto δ preso s volte, costituiscono i centri armonici di grado r del sistema completo $a_1 a_2 \ldots a_n$, rispetto al medesimo polo. Dunque la polare $(n-r)^{ma}$ del punto $(s)^{plo}$ δ è il luogo dei centri armonici di grado $r-s$ del sistema di $n-s$ punti ne' quali F_n è incontrata da una trasversale qualunque condotta per δ.

73. Se δ è un punto multiplo di F_n, ed o un polo qualsivoglia, condotta la

---

(*) De' quali $s+1$ riuniti in δ, perchè ogni generatrice del cono, avendo in δ un contatto $(s+1)^{punto}$ con F_n, ha un eguale contatto con ciascuna polare di δ (69).

(**) *Introd.* 17.

(***) *Introd.* 17.

trasversale $o\delta$, vi saranno almeno due de' punti $a_1 a_2 \, .. \, a_n$ riuniti in δ, epperò (*) δ farà le veci di almeno un centro armonico di grado $n-1$. Cioè la prima polare di un polo qualsivoglia passa pei punti multipli e conseguentemente anche per le linee multiple della superficie fondamentale.

Segue da ciò che, se F_n fosse il complesso di due o più superficie, la prima polare di un polo qualunque passerebbe per le curve lungo le quali si segano a due a due le superficie componenti.

Supponiamo, come caso particolare, che F_n sia composta di un cono d'ordine s e di una superficie F_{n-s}, e che il polo sia il vertice o del cono. Allora ciascuna generatrice di questo, considerata come trasversale, conterrà infiniti punti $a_1 a_2 \, .. \, a_n$, epperò anche infiniti centri armonici di qualunque grado. Dunque la polare $(n-r)^{ma}$ del punto o sarà composta (72) del cono anzidetto e della polare $(n-r)^{ma}$ di o relativa ad F_{n-s}, presa come superficie fondamentale. Se $s=1$, il cono diviene un piano, ed il teorema sussiste per qualunque punto o di questo piano.

74. Le polari (di uno stesso ordine $n-r$) di un polo fisso o rispetto alle superficie d'un fascio d'ordine n, prese come superficie fondamentali, formano un altro fascio, projettivo al dato. In fatti una retta trasversale condotta ad arbitrio per o sega le superficie fondamentali in gruppi di n punti in involuzione (41); ed i centri armonici (di grado r) di questi gruppi rispetto al polo o formano una nuova involuzione projettiva alla prima (**). Ma i centri armonici sono le intersezioni della trasversale colle superficie polari; dunque per un punto qualunque dello spazio non passa che una sola superficie polare, ossia le superficie polari formano un fascio, ecc.

Questo teorema può facilmente essere generalizzato. A tale uopo introduciamo il concetto di sistema lineare di genere m e di grado n di punti sopra una retta data, chiamando con questo nome la serie (m volte infinita) dei gruppi di n punti che sodisfanno ad $n-m$ condizioni comuni, tali che, presi ad arbitrio m punti nella retta, con essi si possa formare un solo gruppo della serie (42). Per $m=1$ si ha l'involuzione di grado n.

Due sistemi lineari di punti dello stesso genere (in una medesima retta o in due rette differenti) si diranno projettivi quando i gruppi dell'uno corrispondano, ciascuno a ciascuno, ai gruppi dell'altro in modo che ai gruppi del primo sistema formanti un sistema minore di genere $m-m'$ corrispondano gruppi del secondo sistema formanti un sistema minore dello stesso genere $m-m'$ (44).

Da questa definizione (***) segue immediatamente che i centri armonici di grado r dei gruppi di un dato sistema lineare di punti (di genere m e di grado n), rispetto ad un polo arbi-

---

(*) *Introd.* 16.
(**) *Introd.* 23.
(***) È superfluo dire che definizioni analoghe si possono dare pei sistemi lineari di curve tracciate in un piano.

trario (preso nella retta data) formano un nuovo sistema lineare (di genere m e di grado r) projettivo al dato.

É inoltre evidente che i punti nei quali le superficie d'ordine n d'un sistema lineare di genere m (42) segano una trasversale qualunque costituiscono un sistema lineare (di genere m e grado n); e che viceversa, se le superficie (dello stesso ordine) di una serie m volte infinita sono incontrate da una retta arbitraria in gruppi di punti di un sistema lineare, anch' esse formeranno un sistema lineare.

Sia ora dato un sistema lineare di genere m di superficie d' ordine n; e sia o un polo fissato ad arbitrio nello spazio. Condotta per o una trasversale qualsivoglia, essa segherà le superficie in punti formanti un sistema lineare, ed i centri armonici di grado r dei gruppi di questo sistema, rispetto al polo o, costituiranno un altro sistema lineare projettivo al primo. Dunque (*):

Le polari (di uno stesso ordine) di un polo fisso rispetto alle superficie di un sistema lineare formano anch' esse un sistema lineare, che è projettivo al dato.

75. In un sistema lineare di genere m di superficie d' ordine n quante sono quelle che hanno un contatto $(m+1)^{punto}$ con una retta data? Una qualsivoglia delle superficie segherà la retta in n punti, $m+1$ de' quali denoto con $x_1 x_2 \dots x_{m+1}$. Questi $m+1$ punti sono tali che, presi ad arbitrio m fra essi, il rimanente ha $n-m$ posizioni possibili, donde segue che vi saranno nella retta $(m+1)(n-m)$ coincidenze dei punti $x_1 x_2 \dots x_{m+1}$ (**); ossia $(m+1)(n-m)$ è il numero delle superficie del sistema che hanno la proprietà dichiarata.

76. Supponiamo che si abbia una superficie ϕ_n d' ordine n, un cono K_n d' ordine n e di vertice o, e che per la curva d' ordine n^2 intersezione dei luoghi ϕ_n, K_n, si faccia passare un'altra superficie ϕ_n' dello stesso ordine n. Ciascuna generatrice del cono K_n incontra le due superficie ϕ_n, ϕ_n' negli stessi n punti, epperò gli r centri armonici, di grado r, del sistema di questi n punti rispetto al polo o, appartengono alle polari $(n-r)^{me}$ di o rispetto ad entrambe le superficie ϕ_n, ϕ_n'. Ogni piano condotto per o contiene n generatrici del cono K_n, epperò nr di quei centri armonici; dunque le due polari anzidette hanno in comune una curva d' ordine nr. Ma due superficie distinte d' ordine r non possono avere in comune una curva il cui ordine superi r^2; quindi, essendo $n > r$, si può conchiudere che le polari $(n-r)^{me}$ di o rispetto a ϕ_n e ϕ_n' sono una sola e medesima superficie. Ossia:

Quando in un fascio di superficie d' ordine n vi è un cono, il vertice di questo cono ha la stessa polare (di qualunque ordine) rispetto a tutte le superficie del fascio.

(*) Cfr. BOBILLIER, *Recherches sur les lois générales qui régissent les lignes et les surfaces algébriques* (Ann. Gerg. t. 18; 1827-28).

(**) Infatti, riferiti i punti x ad un punto fisso o della retta data, avrà luogo fra i segmenti ox un' equazione di grado $n-m$ rispetto a ciascuno di essi, considerati gli altri come dati, cioè un'equazione il cui termine a dimensioni più alte conterrà il prodotto delle potenze $(n-m)^{me}$ dei segmenti ox_1, $ox_2, \dots ox_{m+1}$. Dunque, se i punti x coincidono, questo prodotto diverrà la potenza $(m+1)(n-m)$ di ox.

77. Ritorniamo alla superficie fondamentale F_n, e siano o, o' due punti qualisivogliano dati. Indichiamo con P_o, $P_{o'}$ le prime polari di questi punti rispetto ad F_n; con $P_{oo'}$ la prima polare di o rispetto a $P_{o'}$ risguardata come superficie fondamentale; e similmente con $P_{o'o}$ la prima polare di o' rispetto a P_o. Ci proponiamo di dimostrare che $P_{oo'}$ e $P_{o'o}$ non sono che una sola e medesima superficie.

Si conduca per o' un piano arbitrario E, e sia K_n il cono d' ordine n avente per vertice il punto o e per direttrice la curva EF_n (intersezione del piano E colla superficie F_n). Le superficie K_n, F_n avranno in comune un'altra curva d' ordine $n(n-1)$ situata in una superficie F_{n-1} d' ordine $n-1$. Siccome F_n appartiene, insieme con K_n e col sistema (EF_{n-1}), ad uno stesso fascio, così (75) la polare $P_{o'}$ apparterrà al fascio determinato dal cono K_{n-1}, prima polare di o' rispetto a K_n, e dal sistema (EF_{n-2}), ove F_{n-2} è la prima polare di o' rispetto ad F_{n-1}: la qual superficie F_{n-2} insieme col piano E costituisce la prima polare di o' rispetto alla superficie composta (EF_{n-1}) (74). Siccome poi nell' ultimo fascio menzionato v' è il cono K_{n-1} di vertice o, così (76) la superficie $P_{oo'}$ coinciderà colla prima polare di o rispetto al luogo composto (EF_{n-2}), epperò passerà per la curva d' ordine $n-2$ intersezione di F_{n-2} col piano E (73).

Analogamente, poichè F_n passa per la curva d' intersezione de' luoghi K_n ed (EF_{n-1}), la superficie P_o coinciderà colla prima polare di o rispetto ad (EF_{n-1}), epperò passerà per la curva d' intersezione di F_{n-1} col piano E. La superficie $P_{o'o}$ passerà adunque per la curva d'ordine $n-2$, prima polare di o' rispetto alla curva EF_{n-1} anzidetta; ossia $P_{o'o}$ passerà per l' intersezione di F_{n-2} col piano E.

Ciò torna a dire che le superficie $P_{oo'}$ e $P_{o'o}$ hanno una curva comune d' ordine $n-2$ situata in un piano condotto arbitrariamente per o'; dunque esse non sono che una sola e medesima superficie d' ordine $n-2$.

Abbiansi ora nello spazio $\mu+1$ punti qualisivogliano o, o', o'',.. $o^{(\mu)}$, e si indichi con $P_{oo'o''}$ la prima polare di o rispetto a $P_{o'o''}$, con $P_{oo'o''o'''}$ la prima polare di o rispetto a $P_{o'o''o'''}$, ecc. Il teorema ora dimostrato, ripetuto successivamente, mostra che la polare $P_{oo'o''..o^{(\mu)}}$ rimane la medesima superficie, in qualunque ordine siano presi i poli o, o', o'',.. $o^{(\mu)}$. Se poi si suppone che r di questi punti coincidano in un solo o, e che gli altri $\mu+1-r=r'$ si riuniscano insieme in o', avremo il teorema generale (*):

Data la superficie fondamentale F_n, la polare $(r)^{ma}$ di un punto o rispetto alla polare $(r')^{ma}$ di un altro punto o' coincide colla polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di o.

Tali polari si diranno *polari miste* (**).

78. Suppongasi che la polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di o passi per un punto m, ossia (77) che la polare $(r)^{ma}$ di o rispetto alla polare

---

(*) Plücker, *Ueber ein neues Coordinatensystem* (G. di Crelle, t. 5, 1830 p. 34.

(**) *Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane* (Annali di Matematica, t. 6; Roma 1864), 7. Questa dimostrazione s'intenda sostituita a quella insufficiente data nell' *Introd.* 69 c.

$(r')^{ma}$ di o' passi per m. Allora, in virtù di una proprietà già osservata (62), la polare $((n-r')-r)^{ma}$ di m rispetto alla polare $(r')^{ma}$ di o' passerà per o, ossia (77) la polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(n-r-r')^{ma}$ di m passerà per o. Dunque:

Se la polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di o passa per m, la polare $(r')^{ma}$ di o' rispetto alla polare $(n-r-r')^{ma}$ di m passa per o.

79. Consideriamo di nuovo un punto d, multiplo secondo s per la superficie fondamentale, e sia o un polo qualunque. Condotta la trasversale od, vi sono s de' punti $a_1 a_2 .. a_n$ che coincidono in d, epperò questo punto terrà luogo di $s-r$ centri armonici di grado $n-r$; dunque la polare $(r)^{ma}$ di o passa per d (finchè r sia minore di s). La polare $[(n-r)-(s-r)]^{ma}$ di d rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di o coincide (77) colla polare $(r)^{ma}$ di o rispetto alla polare $(n-s)^{ma}$ di d; ma (71) la polare $(n-s)^{ma}$ di d è un cono di vertice d (e d' ordine s); dunque la polare $[(n-r)-(s-r)]^{ma}$ di d rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di o è un cono di vertice d (e d' ordine $s-r$). Ne segue (71) che:

Se un punto d è multiplo secondo s per la superficie fondamentale, esso è multiplo secondo $s-r$ per la polare $(r)^{ma}$ di qualsivoglia polo o; ed il cono tangente a questa polare in d è la polare $(r)^{ma}$ di o rispetto al cono che tocca la superficie fondamentale nello stesso punto d (*).

Di qui si trae che le polari $(r)^{me}$ di tutt' i punti di una retta passante per d hanno in d lo stesso cono tangente (d' ordine $s-r$).

80. Le prime polari di due punti qualunque o, o', rispetto alla superficie fondamentale F_n, si segano secondo una curva gobba d' ordine $(n-1)^2$, ciascun punto della quale, giacendo in entrambe le prime polari, avrà il suo piano polare passante sì per o, che per o' (62). Dunque:

Il luogo dei punti i cui piani polari passano per una retta data (oo') è una curva gobba d' ordine $(n-1)^2$.

Siccome il piano polare di qualunque punto di questa curva passa per la retta oo', così la prima polare di qualunque punto della retta passerà per la curva; dunque:

Le prime polari dei punti di una retta formano un fascio.

La curva d' ordine $(n-1)^2$, base di questo fascio, si dirà *prima polare della retta data* (**).

81. Le prime polari di tre punti o, o', o'' hanno $(n-1)^3$ punti comuni, ciascuno de' quali avrà il piano polare passante per o, o', o''; vale a dire che ciascuno di quegli $(n-1)^3$ punti sarà polo del piano $oo'o''$. Reciprocamente ogni punto di questo piano avrà la sua prima polare passante per ciascuno di quegli $(n-1)^3$ punti; dunque:

(*) Per la teoria delle curve piane, sostituiscasi questa dimostrazione a quella insufficiente della *Introd.* 73.

(**) Bobillier l. c.

Un piano qualunque ha $(n-1)^3$ poli, i quali sono i punti comuni alle prime polari di tutti i punti del piano (*). Ossia:

Le prime polari dei punti di un piano formano una rete. In fatti, se cerchiamo nel piano dato un polo la cui prima polare passi per un punto m preso ad arbitrio nello spazio, il luogo del polo sarà la retta comune al piano dato ed al piano polare di m; epperò (80) fra le polari dei punti del piano dato quelle che passano per m formano un fascio.

82. Dalle cose precedenti segue:

1.° Che per tre punti passa una sola prima polare; il polo di essa è l' intersezione dei piani polari dei tre punti dati.

2.° Che le prime polari passanti per due punti fissi formano un fascio (ossia hanno in comune una curva d' ordine $(n-1)^2$ passante pei due punti dati), ed i loro poli sono nella retta intersezione dei piani polari dei due punti dati.

3.° Che le prime polari passanti per un punto fisso formano una rete (ossia hanno in comune $(n-1)^3$ punti, compreso il dato) ed i loro poli sono nel piano polare del punto dato.

4.° Che le prime polari di tutti i punti dello spazio formano un sistema lineare in senso stretto, cioè di terzo genere (**).

Quattro prime polari bastano per individuare tutte le altre, purchè esse non appartengano ad uno stesso fascio nè ad una stessa rete. In fatti date quattro prime polari P_1, P_2, P_3, P_4, i cui poli non siano nè in linea retta nè in uno stesso piano, si domandi quella che passa per tre punti dati o, o', o''. Le coppie di superficie $P_1 P_2$, $P_1 P_3$, $P_1 P_4$ individuano tre fasci; le superficie che passano per o ed appartengono rispettivamente a questi tre fasci individueranno una rete. Le superficie di questa rete che passano per o' formano un fascio, nel quale vi è una (una sola) superficie passante per o''. E questa è evidentemente la domandata.

83. In generale le superficie di un sistema lineare non hanno punti comuni a tutte. Ma se quattro prime polari, i cui poli non siano in uno stesso piano, passano per uno stesso punto, questo appartiene a tutte le prime polari ed è doppio per la superficie fondamentale; in fatti, il piano polare di quel punto potendo passare per un punto qualunque dello spazio (62) risulta indeterminato; ed inoltre la prima polare di quel punto dovendo passare pel punto stesso, ne segue che esso appartiene alla superficie fondamentale. Dunque ecc.

In generale, se quattro prime polari (i cui poli non siano in uno stesso piano) hanno un punto $(s)^{plo}$ comune d, questo sarà multiplo secondo s per ogni altra prima polare, il che risulta evidente dal modo col quale questa polare si deduce dalle quattro date (82). La prima polare di d passerà per d, epperò questo punto apparterrà anche alla superficie fondamentale. Inoltre le polari prima, seconda,.... $(s-1)^{ma}$ di qualunque punto dello spazio rispetto ad

(*) Bobillier l. c.

(**) D' ora in avanti, se non si faccia una dichiarazione contraria, i sistemi lineari s' intenderanno di terzo genere.

una qualunque delle prime polari anzidette passeranno (79) per d, o in altre parole, le polari seconda, terza,.. s^{ma} di un punto qualunque dello spazio, rispetto ad F_n, passano per d; donde segue che le polari $(n-2)^{ma}$, $(n-3)^{ma}$, .. $(n-s)^{ma}$ del punto d, potendo passare per ogni punto dello spazio, saranno indeterminate; e la polare $(n-s-1)^{ma}$ dello stesso punto d sarà un cono d' ordine $s+1$. Dunque (71) d è un punto multiplo secondo il numero $s+1$ per la superficie fondamentale.

Questo teorema si può esporre in un' altra maniera. Supponiamo che le polari $(s)^{me}$ di tutti i punti dello spazio abbiano un punto comune d; questo apparterrà anche alla polare $(s)^{ma}$ del punto stesso, e quindi alla superficie fondamentale. Il punto d poi avrà la sua polare $(n-s)^{ma}$ passante per un punto qualunque dello spazio, vale a dire indeterminata. Dunque la polare $(n-s-1)^{ma}$ di d sarà un cono avente il vertice in d, epperò d sarà un punto $(s+1)^{plo}$ per la superficie fondamentale.

84. Supponiamo ora che la polare $(r)^{ma}$ di un punto o abbia un punto o' multiplo secondo il numero s. Allora le polari $(r+1)^{ma}$, $(r+2)^{ma}$, .. $(r+s-1)^{ma}$ di o passeranno tutte per o', e per conseguenza (62) le polari $(n-r)^{ma}$, $(n-r-1)^{ma}$, .. $(n-r-s+1)^{ma}$ di o' passeranno per o. Inoltre (79) anche la polare t^{ma} (ove $t=1, 2, .. s-1$) di un punto qualunque m rispetto alla polare r^{ma} di o passerà $s-t$ volte per o', donde segue (78) che la polare t^{ma} di m rispetto alla polare $(n-r-t)^{ma}$ di o' passa per o. Quindi (83) il punto o è multiplo secondo il numero $t+1$ per la polare $(n-r-t)^{ma}$ di o'. Dando a t il suo massimo valore si ha pertanto il teorema:

Se la polare $(r)^{ma}$ di un punto o ha un punto $(s)^{plo}$ o', viceversa o è un punto $(s)^{plo}$ per la polare $(n-r-s+1)^{ma}$ di o'.

85. La polare $(r')^{ma}$ di un punto o', presa rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di un altro punto o, abbia un punto o'' multiplo secondo il numero s, ossia la polare $(r)^{ma}$ di o rispetto alla polare $(r')^{ma}$ di o' abbia il punto $(s)^{plo}$ o''. Allora, applicando il teorema dimostrato precedentemente (84) alla polare $(r')^{ma}$ di o', risguardata come superficie fondamentale, troveremo che la polare $(n-r'-r-s+1)^{ma}$ di o'' rispetto alla polare $(r')^{ma}$ di o' ha un punto $(s)^{plo}$ in o; dunque:

Se la polare $(r')^{ma}$ di un punto o' rispetto alla polare $(r)^{ma}$ di un altro punto o ha un punto $(s)^{plo}$ o'', viceversa la polare $(n-r-r'-s+1)^{ma}$ di o'' rispetto alla polare $(r')^{ma}$ di o' avrà un punto $(s)^{plo}$ in o.

86. Si è veduto (69) che la quadrica polare di un punto parabolico o della superficie fondamentale è un cono tangente al relativo piano stazionario, e che la generatrice di contatto è la retta osculatrice ad F_n in o. In questa retta sarà quindi situato il vertice o' del cono. Applicando ora a questi punti o, o', un teorema precedente (84), vediamo che, essendo o' un punto doppio per l' $(n-2)^{ma}$ polare di o, la prima polare di o' avrà un punto doppio in o; ossia:

Un punto parabolico o è doppio per una prima polare, il cui polo è situato nella retta che oscula in o la superficie fondamentale.

Se un punto o, appartenente alla superficie fondamentale, ha per quadrica polare un cono, esso sarà o un punto doppio o un punto parabolico per F_n. In fatti, se il cono polare ha il vertice in o, questo punto è doppio per la superficie fondamentale (71). Se poi il vertice è un altro punto o', siccome la quadrica polare di o deve toccare in questo punto la superficie fondamentale, bisogna che oo' sia l'unica retta osculatrice in o, cioè che o sia un punto parabolico.

Inviluppi di piani polari e luoghi di poli.

87. Proponiamoci di determinare l'inviluppo dei piani polari (relativi ad F_n) dei punti di una retta R. I piani polari passanti per un punto qualunque i hanno (62) i loro poli nella prima polare di i, la quale segherà R in $n-1$ punti; vale a dire, per i passano $n-1$ piani, ciascuno de' quali ha un polo in R. L'inviluppo cercato è dunque una sviluppabile della classe $n-1$: le daremo il nome di polare $(n-1)^{ma}$ della retta R.

Se la prima polare di i fosse tangente ad R, due degli $n-1$ piani passanti per i coinciderebbero, e questo punto apparterrebbe alla sviluppabile. Dunque l'inviluppo dei piani polari dei punti di R è ad un tempo il luogo dei poli delle prime polari tangenti ad R.

Se T è una retta arbitraria, le prime polari dei punti di T formano un fascio (80), nel quale è noto esservi $2(n-2)$ superficie tangenti ad una retta qualunque, p. e. ad R; dunque T contiene $2(n-2)$ punti del luogo, ossia: la polare $(n-1)^{ma}$ di R è una sviluppabile d'ordine $2(n-2)$.

Se m è un punto in R, le prime polari tangenti ad R in m avranno (82) i loro poli in una retta M, generatrice della sviluppabile che si considera. Analogamente, se m' è il punto di R successivo ad m, le prime polari tangenti ad R in m' avranno i loro poli nella retta M', generatrice successiva ad M. La prima polare che oscula R in m avrà dunque il suo polo nel punto comune alle rette M, M'; ossia la curva cuspidale della sviluppabile sarà il luogo dei poli delle prime polari osculatrici ad R.

In una rete di superficie d'ordine $n-1$, ve ne sono $3(n-3)$ che osculano una retta data (75). Ora, se le superficie della rete sono prime polari (relative ad F_n), i loro poli sono in un piano (82); un piano qualunque contiene per conseguenza $3(n-3)$ punti le cui prime polari osculano R; ossia il luogo dei poli delle prime polari osculate da R è una curva gobba d'ordine $3(n-3)$, che è lo spigolo di regresso della sviluppabile sopra menzionata.

Una sezione piana di questa sviluppabile, essendo dell'ordine $2(n-2)$, della classe $n-1$, e dotata di $3(n-3)$ cuspidi, avrà $2(n-3)(n-4)$ punti doppi; dunque: il luogo dei poli delle prime polari tangenti ad R in due punti distinti è una curva gobba dell'ordine $2(n-3)(n-4)$, che è la linea nodale della sviluppabile di cui si tratta.

Si dimostra nello stesso modo che i piani polari dei punti di una

curva qualsivoglia data, d'ordine m, è una sviluppabile della classe $m(n-1)$, la quale è anche il luogo dei punti le cui prime polari sono tangenti alla curva data.

88. Consideriamo ora la polare $(n-1)^{ma}$ di una superficie data d'ordine m, ossia l'inviluppo dei piani polari dei punti di questa superficie. I piani passanti per una retta qualunque T hanno i loro poli (80) in una curva gobba d'ordine $(n-1)^2$, la quale incontrerà la superficie data in $m(n-1)^2$ punti, epperò l'inviluppo richiesto è una superficie della classe $m(n-1)^2$.

Se due degli $m(n-1)^2$ punti anzidetti coincidono, la retta T sarà tangente alla superficie di cui si tratta; epperò se a due rette T, T' passanti per uno stesso punto i corrispondano due curve tangenti in uno stesso punto i' alla superficie data, i' sarà un polo del piano TT', e questo piano sarà tangente in i alla superficie della classe $m(n-1)^2$. Ma in tal caso la prima polare del punto i, contenendo entrambe le due curve gobbe, è tangente in i' alla superficie data; dunque:

L'inviluppo dei piani polari dei punti di una superficie data è ad un tempo il luogo dei punti le cui prime polari sono tangenti alla superficie data medesima.

La polare $(n-1)^{ma}$ di un piano è una superficie dell'ordine $3(n-2)^2$, perchè in un fascio di superficie dell'ordine $n-1$ ve ne sono $3(n-2)^2$ che toccano un piano dato (41).

89. Quale è il luogo dei poli dei piani tangenti ad una data superficie di classe m? Per una retta arbitraria T passano m piani tangenti alla superficie data, i quali hanno tutti i loro poli nella curva gobba d'ordine $(n-1)^2$, prima polare di T (80). Questa curva ha $m(n-1)^3$ punti comuni col luogo cercato (tanti essendo i poli di m piani), epperò questo luogo è una superficie d'ordine $m(n-1)$.

Se T è una retta tangente alla superficie data, due di quegli m piani coincidono, e per conseguenza la curva gobba, prima polare di T, avrà $(n-1)^3$ punti di contatto col luogo di cui si tratta. E se due rette T, T' toccano in uno stesso punto i la superficie data, le curve gobbe corrispondenti a queste rette toccheranno il luogo negli stessi $(n-1)^3$ punti; e siccome le due curve sono situate insieme nella prima polare del punto i, così gli $(n-1)^3$ poli del piano TT' saranno altrettanti punti di contatto fra il luogo e la prima polare del punto i. Dunque:

Il luogo dei poli dei piani tangenti ad una superficie data è anche l'inviluppo delle prime polari dei punti della superficie data.

Ciascuna inviluppata ha coll'inviluppo $(n-1)^3$ punti di contatto, i quali sono i poli del piano tangente alla superficie data nel polo dell'inviluppata.

La prima polare del punto i segherà il luogo secondo una curva d'ordine $m(n-1)^2$, che è evidentemente il luogo dei poli dei piani che per i si possono condurre a toccare la superficie data, ossia dei piani tangenti al cono di vertice i, circoscritto alla superficie data.

Alla superficie d'ordine $m(n-1)$, qui considerata come luogo e come inviluppo, daremo il nome di prima polare della superficie data.

90. La superficie data sia ora sviluppabile e della classe m; e cerchiamo

anche per essa il luogo dei poli dei suoi piani tangenti. Per un punto qualunque o si possono condurre m piani tangenti alla sviluppabile data; questi piani hanno i loro $m(n-1)^3$ poli nella prima polare di o e sono altrettanti punti del luogo. Il luogo richiesto è adunque una curva gobba dell' ordine $m(n-1)^2$. Se il punto o è nella sviluppabile, due degli m piani tangenti coincidono, epperò la prima polare di o toccherà il luogo in $(n-1)^3$ punti. Il luogo è per conseguenza anche l' inviluppo delle prime polari dei punti della superficie data, in questo senso che la curva trovata è toccata in $(n-1)^3$ punti dalla prima polare di un punto qualunque della sviluppabile data. La medesima curva sarà osculata in $(n-1)^3$ punti dalla prima polare di un punto qualunque dello spigolo di regresso della sviluppabile, e sarà toccata in $2(n-1)^3$ punti dalla prima polare di un punto qualunque della linea nodale della sviluppabile medesima.

Fasci projettivi di superficie.

91. Dati due fasci projettivi, l' uno di superficie d' ordine n_1, l' altro di superficie d' ordine n_2, quale sarà il luogo della curva d'ordine $n_1 n_2$, intersezione di due superficie corrispondenti? Se x è un punto qualunque di una retta T, per x passa una superficie del primo fascio; la corrispondente superficie del secondo fascio segherà T in n_2 punti x'. Viceversa, per un punto x' passa una superficie del secondo fascio, e la corrispondente superficie del primo fascio incontrerà T in n_1 punti x. Abbiamo dunque in T due serie di punti x, x' che hanno la corrispondenza (n_1, n_2); il numero de' punti uniti sarà $n_1 + n_2$; cioè il luogo cercato è una superficie d' ordine $n_1 + n_2$.

Ovvero: un piano qualunque sega le superficie date secondo curve formanti due fasci projettivi; ora il luogo dei punti comuni alle curve corrispondenti è (*) una linea d' ordine $n_1 + n_2$; dunque il luogo domandato è tagliato da un piano arbitrario secondo una curva d' ordine $n_1 + n_2$.

Questa superficie passa per le curve d' ordini n_1^2, n_2^2, basi de' due fasci, perchè ciascun punto di una di queste curve è situato in tutte le superficie di un fascio ed in una superficie dell' altro.

Se o è un punto della curva (n_1^2), S_2 la superficie del secondo fascio che passa per o, S_1 la corrispondente superficie del primo fascio, e P il piano che tocca S_1 in o; il piano P sega S_1 secondo una curva che ha un punto doppio in o, ed S_2 secondo una curva che passa per o; dunque (**) o sarà un punto doppio anche per la curva $(n_1 + n_2)$, intersezione della superficie $(n_1 + n_2)$ col piano P. Vale a dire, questa superficie è toccata in o dal piano P.

(*) Grassmann, *Die höhere Projectivität in der Ebene* (G. di Crelle t. 42; 1851) p. 202. — *Introd.* 50.

(**) *Introd.* 51 b.

92. Sopra una superficie Σ d' ordine $n_1 + n_2$ suppongasi tracciata una curva C_1 d' ordine n_1^2, costituente la base di un fascio di superficie d' ordine n_1, e sia in primo luogo $n_1 > n_2$. Siano S_1, S_1' due superficie di questo fascio: siccome le superficie S_1, Σ hanno in comune la curva C_1 che è situata in una superficie S_1' d' ordine n_1, esse si segheranno inoltre secondo una curva d' ordine $n_1 n_2$ situata in una superficie S_2 d' ordine n_2 (*), la quale è unica perchè due superficie d' ordine n_2 non possono avere in comune una curva d' ordine $n_1 n_2 > n_2^2$. Parimente le superficie S_1', Σ, passando insieme per la curva C_1 situata in una superficie S_1 d' ordine n_1, si segheranno secondo un' altra curva d' ordine $n_1 n_2$ giacente in una determinata superficie S'_2 d'ordine n_2. I punti ove la curva C_2 comune alle superficie S_2, S'_2 incontra le superficie S_1, S_1' appartengono rispettivamente alle curve $S_1 S_2$, $S_1' S_2'$, epperò sono tutti situati nella superficie Σ. Ma il loro numero $2n_1 n_2^2$ supera quello $((n_1 + n_2) n_2^2)$ delle intersezioni di una curva d' ordine n_2^2 con una superficie d' ordine $n_1 + n_2$, dunque la curva $S_2 S_2'$ giace per intero in Σ e vi forma la base di un fascio d' ordine n_2. Così abbiamo in Σ due curve C_1, C_2, che sono le basi di due fasci $(S_1, S_1', \ldots)$, $(S_2, S_2', \ldots)$ d'ordini n_1, n_2. Ciascuna superficie del primo fascio sega Σ lungo una curva d' ordine $n_1 n_2$ per la quale passa una determinata superficie del secondo fascio; e viceversa questa superficie individua la prima. Dunque i due fasci sono projettivi ed il luogo delle curve comuni alle superficie corrispondenti è Σ.

In secondo luogo si supponga $n_1 \overline{\overline{<}} n_2$. Una superficie qualunque S_1 d' ordine n_1 passante per la curva C_1 sega Σ lungo un' altra curva d'ordine $n_1 n_2$ per la quale passano (20, *nota*) infinite superficie d' ordine n_2; sia S_2 una di queste, individuata col fissare, sulla stessa superficie Σ ma fuori della curva C_1, $N(n_2 - n_1) + 1$ punti arbitrari. Allora S_2 intersecherà Σ secondo un' altra curva C_2 d' ordine n_2^2, che è la base d' un fascio d' ordine n_2 (**). Un' altra superficie S_1' d' ordine n_1 passante per C_1 segherà Σ lungo un' altra curva d' ordine $n_1 n_2$, che avrà $n_1 n_2^2$ punti comuni con C_2 (i punti in cui C_2 è incontrata da S_1'), onde la superficie S_2' d' ordine n_2, che passa per C_2 e per un nuovo punto preso ad arbitrio nell' ultima curva d' ordine $n_1 n_2$, conterrà questa per intero. Per tal modo avremo in Σ, come nel primo caso, due curve C_1, C_2 basi di due fasci projettivi, le cui superficie corrispondenti si segheranno secondo curve tutte situate in Σ (***).

93. Siano di nuovo i due fasci projettivi, l' uno d' ordine n', l' altro d'ordine $n - n'' < n'$, ed in essi alle superficie $S_{n'}$, $S_{n''} + S_{n' - n''}$ del primo fascio (dove $S_{n''} + S_{n' - n''}$ è il complesso di due superficie $S_{n''}$, $S_{n' - n''}$) corrispondano ordinatamente le superficie $S_{n' - n''}$, $S_{n - n'} + S_{n' - n''}$ del secondo fascio; il luogo delle curve intersezioni delle superficie corrispondenti risulterà composto della superficie $S_{n' - n''}$ d' ordine $n' - n''$ e di un' altra

---

(*) Quest' asserzione è una conseguenza immediata dalla proprietà analoga che sussiste (*Introd.* 44) per le curve risultanti dal segare le superficie in discorso con un piano qualunque.

(**) Vedi l' osservazione nella *nota* precedente.

(***) Chasles, *Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres* (Compte rendu du 28 déc. 1857).

superficie S_n d' ordine n. Allora il teorema precedente può essere presentato nella maniera seguente.

Siano date le superficie S_n, S_n', S_n'', la prima delle quali passi per la curva d' ordine $n'n''$ comune alle altre due; e sia $n \geqq n'$, $n < n' + n''$ ed $n' \geqq n''$. La superficie S_n' segherà S_n secondo un' altra curva d' ordine $n'(n - n'')$, situata in una superficie $S_{n-n''}$, unica e determinata perchè $n - n'' < n'$. Parimente S_n'' e S_n avranno in comune un' altra curva d' ordine $n''(n - n')$, giacente in una superficie $S_{n-n'}$ individuata perchè $n - n' < n''$. Allora $S_{n-n'}$ ed $S_{n-n''}$ si segheranno lungo una curva situata in S_n, in virtù del teorema generale (92). Per tal modo, date S_n, S_n' ed S_n'', le superficie $S_{n-n'}$, $S_{n-n''}$ sono uniche e determinate, ed S_n appartiene ad uno stesso fascio insieme colle superficie composte $S_n' + S_{n-n'}$, $S_n'' + S_{n-n''}$. Dunque, se sono date soltanto S_n', S_n'', siccome $S_{n-n'}$, $S_{n-n''}$ possono sodisfare ad $N(n - n') + N(n - n'')$ condizioni, e siccome nel fissare una superficie di un fascio si può sodisfare ad una nuova condizione, così S_n potrà sodisfare ad $N(n - n') + N(n - n'') + 1$ condizioni. Ossia: se S_n dee passare per la curva $S_n' S_n''$, ciò equivale a dovere passare per $N(n) - N(n - n') - N(n - n'') - 1$ punti dati ad arbitrio; ossia: ogni superficie d' ordine n che passi per $N(n) - N(n - n') - N(n - n'') - 1$ punti arbitrari della curva comune a due superficie d' ordine n', n'' (ove sia $n < n' + n''$) la contiene per intero.

Una superficie d' ordine n che passi per $N(n) - N(n - n') - N(n - n'') - 2$ punti arbitrari della curva $(n' n'')$ la segherà in altri $nn'n'' - N(n) + N(n - n') + N(n - n'') + 2$ punti, i quali non potendo essere arbitrari senza che la superficie contenga per intero la curva, saranno determinati dai primi. Dunque tutte le superficie d' ordine n che passano pei primi punti passano anche per gli altri; ossia le $nn'n''$ intersezioni di tre superficie d' ordini n, n', n'' sono individuate da $N(n) - N(n - n') - N(n - n'') - 2$ fra esse: supposto che il più grande dei numeri n, n', n'' sia minore della somma degli altri due.

94. Sia ancora la superficie composta $S_n + S_{n'-n''}$ generata per mezzo di due fasci projettivi, nei quali alle superficie S_n', $S_n'' + S_{n'-n''}$ del primo corrispondano le superficie $S_{n-n''}$, $S_{n-n'} + S_{n'-n''}$ del secondo; ma ora sia $n \geqq n' + n''$, $n' \geqq n''$.

Siano date le superficie S_n, S_n', S_n''. La superficie S_n' segherà S_n secondo una curva d' ordine $n'(n - n'')$, per la quale e per $N(n - n' - n'') + 1$ punti addizionali, che prenderemo in S_n, passa una superficie $S_{n-n''}$ d' ordine $n - n''$ (92). Così S_n'' segherà S_n secondo una curva d' ordine $n''(n - n')$, per la quale e pei punti addizionali suddetti passerà una superficie $S_{n-n'}$ d' ordine $n - n'$. E le due superficie $S_{n-n'}$, $S_{n-n''}$ s' intersecheranno sulla S_n, la quale per conseguenza appartiene insieme colle $S_n' + S_{n-n'}$, $S_n'' + S_{n-n''}$ ad uno stesso fascio. Se oltre alla curva $S_n' S_n''$, anche i punti addizionali sono dati nello spazio, senza che sia data S_n, la superficie

$S_{n-n'}$ dovendo passare per quei punti potrà sodisfare ad altre $N(n-n')$ $-N(n-n'-n'')-1$ condizioni; e così pure $S_{n-n''}$ ad altre $N(n-n'')$ $-N(n-n'-n'')-1$ condizioni. Quindi S_n potrà sodisfare a $[N(n-n')$ $-N(n-n'-n'')-1]+[N(n-n'')-N(n-n'-n'')-1]+1$ condizioni. Ne segue che il passare per la curva $S_{n'}S_{n''}$ e pei punti addizionali equivale, per S_n, a $N(n)-N(n-n')-N(n-n'')+2N(n-n'-n'')+1$ condizioni, cioè passare per la curva $S_{n'}S_{n''}$ equivale ad

$$N(n)-N(n-n')-N(n-n')+N(n-n'-n'')=\frac{n'n''(2n-n'-n''+4)}{2}$$

condizioni. Dunque: *nell' ipotesi attuale, se una superficie d'ordine n passa per $N(n)-N(n-n')-N(n-n'')+N(n-n'-n'')$ punti arbitrari della curva comune a due superficie d'ordini n',n'', la contiene per intero.*

Per conseguenza, *ogni superficie d'ordine n passante per $N(n)-N(n-n')-N(n-n'')+N(n-n'-n'')-1$ punti arbitrari della curva $(n'n'')$ la incontrerà in altri*
$nn'n''-N(n)+N(n-n')+N(n-n'')-N(n-n'-n'')+1$
$=\frac{n'n''(n'+n''-4)}{2}+1$ *punti determinati dai primi.* Ossia, *le $nn'n''$ intersezioni di tre superficie d'ordini n,n',n'' sono individuate da $\frac{n'n''(2n-n'-n''+4)}{2}-1$ fra esse: supposto che il più grande dei numeri n,n',n'' non sia minore della somma degli altri due* (*).

95. Date due superficie d'ordini n_1, n_2, quale è il luogo di un punto x i cui piani polari relativi a quelle si seghino sopra una data retta R? Se per un punto i di R passano i piani polari di x, viceversa le prime polari di i si segheranno in x (62). Variando i sopra R, le prime polari formano (80) due fasci projettivi d'ordini n_1-1, n_2-1, e questi generano (91) una superficie d'ordine n_1+n_2-2, la quale sarà il luogo domandato.

Ciascun punto comune a questa superficie ed alla curva intersezione delle due superficie date avrà per piani polari i piani tangenti in quel punto alle due superficie, onde l'intersezione dei due piani sarà la tangente alla curva (n_1n_2) nel punto medesimo. Ma questa intersezione incontra la retta R, dunque tante sono le intersezioni delle superficie (n_1+n_2-2) colla curva (n_1n_2) quante le tangenti della curva (n_1n_2) incontrate da R. Supponiamo che la curva (n_1n_2) abbia d punti doppi ed s cuspidi, cioè le due superficie date abbiano un contatto ordinario in d punti ed un contatto stazionario in s punti; questi punti apparterranno evidentemente anche alla superficie (n_1+n_2-2) ed

(*) Jacobi l. c.

il numero delle intersezioni rimanenti sarà $n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2) - 2d - 3s$ (*), dunque:

Le tangenti della curva intersezione di due superficie d' ordini n_1, n_2, aventi fra loro d contatti ordinari ed s contatti stazionari, formano una sviluppabile d' ordine $n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2) - 2d - 3s$.

Per tal modo noi conosciamo della curva $(n_1 n_2)$ l' ordine $n = n_1 n_2$, l' ordine della sviluppabile osculatrice (**) $r = n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2) - 2d - 3s$, ed il numero dei punti stazionari $\beta = s$. Quindi le formole di Cayley (12) ci daranno le altre caratteristiche:

$$2h = n_1 n_2(n_1 - 1)(n_2 - 1),$$

$$m = 3n_1 n_2(n_1 + n_2 - 3) - 6d - 8s,$$

$$d = 2n_1 n_2(3n_1 + 3n_2 - 10) - 3(4d + 5s),$$

$$2g = n_1 n_2(n_1 + n_2 - 3) \{ 9n_1 n_2(n_1 + n_2 - 3) - 6(6d + 8s) - 22 \} + 5n_1 n_2 + (6d + 8s)(6d + 8s + 7),$$

$$2x = n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2) \{ n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2) - 2(2d + 3s) - 4 \} + (2d + 3s)^2 + 8d + 11s,$$

$$2y = n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2) \{ n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2) - 2(2d + 3s) - 10 \} + 8n_1 n_2 + (5d + 3s)^2 + 20d + 27s,$$

dove h è il numero de' punti doppi apparenti della curva (non contati i punti doppi attuali il cui numero è d).

Il genere della curva è $\frac{1}{2}(n_1 n_2 - 1)(n_1 n_2 - 2) - (h + d + s)$

$= \frac{1}{2} n_1 n_2(n_1 + n_2 - 4) - (d + s - 1)$, ed è 0 quando la curva ha il massimo numero di punti doppi. Dunque: il massimo numero di punti in cui due superficie d' ordini n_1, n_2 si possano toccare è

$\frac{1}{2} n_1 n_2(n_1 + n_2 - 4) + 1$.

96. Supponiamo ora che le due superficie (n_1), (n_2) si seghino secondo due

---

*) Il numero delle intersezioni rimanenti sia $n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2) - xd - ys$, ove x, y sono coefficienti numerici da determinarsi. A quest' uopo suppongo $n_1 = n$, $n_2 = 1$; allora la superficie $(n_1 + n_2 - 2)$ diviene la prima polare del punto o, ove R incontra un piano P, rispetto ad una superficie data F_n. Le tangenti della curva PF_n incontrate da R sono quelle che passano per o; dunque il numero $n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2) - xd - ys$ deve esprimere la classe della curva PF_n. Ma questa classe è $n(n - 1) - 2d - 3s$, dunque $x = 1$, $y = 3$.

(**) Dicesi *rango* di una curva gobba l' ordine della sua sviluppabile osculatrice.

curve, i cui ordini siano μ, μ' $(\mu + \mu' = n_1 n_2)$ ed i ranghi r, r'. Indichiamo con h e d, h' e d' i numeri de'loro punti doppi apparenti ed attuali, con s, s' i numeri de' loro punti stazionari, e con k il numero delle loro intersezioni apparenti, cioè il numero delle rette che da un punto arbitrario dello spazio si possono condurre a segare entrambe le curve. Allora avremo (95,12):

$$(\mu + \mu')(n_1 - 1)(n_2 - 1) = 2(h + h' + k)\,,$$

$$r = \mu(\mu - 1) - 2(h + d) - 3s\,,$$

$$r' = \mu'(\mu' - 1) - 2(h' + d') - 3s'\,,$$

donde

$$r - r' = (\mu - \mu')(n_1 n_2 - 1) - 2(h - h') - 2(d - d') - 3(s - s')\,.$$

Osserviamo poi che la superficie d' ordine $n_1 + n_2 - 2$, luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle due date s' incontrino sopra una retta data R (95), segherà la curva (μ) non solamente ne' punti in cui questa è toccata da rette appoggiate ad R, ma anche nei punti in cui la curva (μ) è intersecata dall' altra curva (μ'), perchè ciascuno di questi è un punto di contatto fra le due superficie date. Dunque, se i è il numero delle intersezioni (attuali) delle due curve (μ), (μ'), avremo

$$(n_1 + n_2 - 2)\mu = r + i + 2d + 3s$$

ed analogamente

$$(n_1 + n_2 - 2)\mu' = r' + i + 2d' + 3s'\,,$$

e quindi anche

$$(n_1 + n_2 - 2)(\mu - \mu') = r - r' + 2(d - d') + 3(s - s')\,.$$

Da questa equazione e da un' altra che sta innanzi si ricava

$$(\mu - \mu')(n_1 - 1)(n_2 - 1) = 2(h - h')$$

e quindi

$$\mu\,(n_1 - 1)(n_2 - 1) = 2h + k\,,$$

$$\mu'(n_1 - 1)(n_2 - 1) = 2h' + k\,.$$

Mediante queste equazioni, dato h, si calcolano h' e k; e dato r, si calcolano r' ed i (supposti nulli o conosciuti d, s, d', s'). Uno di questi risultati può essere enunciato così:

Se due superficie d' ordini n_1, n_2 si segano secondo una curva d' ordine μ, le cui tangenti formino una sviluppabile d' ordine r, le superficie date hanno in comune un' altra curva d' ordine $\mu' = n_1 n_2 - \mu$, la quale incontra la prima in $i = (n_1 + n_2 - 2)\mu - r$ punti ed è lo spigolo di regresso di una sviluppabile d' ordine $r' = (n_1 + n_2 - 2)(\mu' - \mu) + r$ (*).

97. Supponiamo che per la curva (μ) passi una terza superficie (n_3); que-

---

(*) Salmon, *Geometry of three dimensions* p. 274.

sta incontrerà la curva (μ') non solamente negli i punti anzidetti, ma eziandio in altri $n_3 \mu' - i = n_1 n_2 n_3 - \mu(n_1 + n_2 + n_3 - 2) + r$ punti non situati nella curva (μ); dunque:

Se tre superficie d' ordini n_1, n_2, n_3 hanno in comune una curva d' ordine μ, le cui tangenti formino una sviluppabile d' ordine r, esse si segheranno in $n_1 n_2 n_3 - \mu(n_1 + n_2 + n_3 - 2) + r$ punti, non situati su quella (*).

98. Siano dati tre fasci projettivi di superficie i cui ordini siano rispettivamente n_1, n_2, n_3. I primi due fasci generano, nel modo che si è detto precedentemente (91), una superficie d'ordine $n_1 + n_2$; e similmente il primo ed il terzo fascio generano un' altra superficie d' ordine $n_1 + n_3$. Entrambe queste superficie passano per la curva d' ordine n_1^2, base del primo fascio, quindi esse si segheranno inoltre secondo una curva d' ordine $(n_1 + n_2)(n_1 + n_3) - n_1^2$; dunque:

Il luogo di un punto ove si segano tre superfcie corrispondenti di tre fasci projettivi i cui ordini siano n_1, n_2, n_3, è una curva gobba d' ordine $n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$.

Questa curva è situata sulle tre superficie d' ordine $n_2 + n_3$, $n_3 + n_1$, $n_1 + n_2$, generate dai tre fasci presi a due a due. Essa ha inoltre evidentemente la proprietà di passare per gli $n_1^2(n_2 + n_3)$ punti in cui la base del primo fascio incontra la superficie generata dagli altri due, ecc.

99. Sia dato un fascio di superficie d'ordine n; e siano a, b, c tre punti (non in linea retta) di un dato piano P. Se m è un punto comune alle prime polari dei punti a, b, c rispetto ad una superficie del fascio, m sarà un polo del piano P rispetto a questa superficie (81). Ora le prime polari dei punti a, b, c rispetto alle superficie del fascio formano (74) tre nuovi fasci projettivi tra loro d' ordine $n - 1$; ed il luogo di un punto m pel quale passino tre superficie corrispondenti di questi tre fasci sarà (98) una curva gobba d' ordine $3(n - 1)^2$; dunque:

Il luogo dei poli di un piano rispetto alle superficie d' un fascio d' ordine n è una curva gobba d' ordine $3(n - 1)^2$.

É evidente che questa curva passa pei punti in cui il piano dato tocca superficie del fascio dato (4).

100. Siano dati quattro fasci projettivi di superficie, i cui ordini siano rispettivamente n_1, n_2, n_3, n_4. I primi tre fasci generano (98) una curva d'ordine $n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$, mentre il primo ed il quarto fascio generano (91) una superficie d' ordine $n_1 + n_4$ che passa per la curva base del primo fascio, ed ha conseguentemente $n_1^2(n_2 + n_3)$ punti comuni colla curva generata dai primi tre fasci. Questa curva e la superficie anzidetta avranno dunque in comune altri $(n_1 + n_4)(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2) - n_1^2(n_2 + n_3)$ punti, epperò:

(*) Si potrebbe trattare la quistione generale: in quanti punti si segano tre superficie (n_1), (n_2), (n_3) aventi in comune una curva (μ, r), la quale sia multipla per quelle superficie ordinatamente secondo i numeri d_1, d_2, d_3?

Vi sono $n_2n_3n_4 + n_3n_4n_1 + n_4n_1n_2 + n_1n_2n_3$ punti per ciascun de' quali passano quattro superficie corrispondenti di quattro fasci projettivi i cui ordini siano n_1, n_2, n_3, n_4.

Questi punti sono situati nelle sei superficie generate dai fasci presi a due a due, ed anche nelle quattro curve gobbe generate dai fasci presi a tre a tre.

101. In un fascio di superficie d' ordine n quante ve n' ha dotate di punto doppio? Presi ad arbitrio quattro punti nello spazio, le loro prime polari, rispetto alle superficie del fascio, formano (74) quattro fasci projettivi d' ordine $n-1$. Se una delle superficie date ha un punto doppio, per questo passa la prima polare di qualsivoglia polo (73); perciò i punti doppi delle superficie date saranno quei punti dello spazio pei quali passano quattro superficie corrispondenti dei quattro fasci anzidetti. Dunque (100) :

In un fascio di superficie d' ordine n ve ne sono $4(n-1)^3$ dotate di punto doppio.

I piani polari di un polo fisso rispetto alle superficie d' un fascio formano un altro fascio projettivo al primo; ma, se il polo è un punto doppio di una delle superficie, il piano polare relativamente a questa è indeterminato; dunque ciascuno dei $4(n-1)^3$ punti doppi ha lo stesso piano polare rispetto a tutte le superficie del fascio (*).

Reti projettive.

102. Date due reti projettive di superficie d'ordini n_1, n_2, un fascio qualunque della prima ed il fascio corrispondente della seconda generano una superficie Φ d' ordine n_1+n_2. Le superficie Φ formano una nuova rete. In fatti, siano a e b due punti arbitrari dello spazio; per a passano infinite superficie della prima rete formanti un fascio; le corrispondenti superficie della seconda rete formano un altro fascio, nel quale vi è una superficie passante per a. Dunque per a passano due superficie corrispondenti P, P' delle due reti; per b del pari due superficie corrispondenti Q, Q'; e le superficie (P, Q), (P', Q') determinano due fasci projettivi (**), i quali generano una superficie Φ_3, la sola che passi per a e per b.

Sia R, R' un' altra coppia di superficie corrispondenti delle due reti, le quali non appartengano rispettivamente ai fasci (P, Q), (P', Q'). I fasci (P, R), (P', R') genereranno un' altra superficie Φ_2, ed i fasci (Q, R), (Q', R') una terza superficie Φ_1. Le superficie Φ_2, Φ_3 hanno in comune la curva PP' d' ordine n_1n_2, epperò si segheranno secondo un' altra curva d' ordine

---

(*) È evidente che, dati due fasci projettivi, se ad un certo elemento dell' uno corrisponde un elemento indeterminato nell' altro, allora a ciascuno degli altri elementi del primo fascio corrisponde nel secondo un elemento fisso; onde quest' ultimo fascio non conterrà che un elemento unico.

(**) In questo senso che le superficie corrispondenti de' due fasci siano superficie corrispondenti delle due reti date.

$(n_1 + n_2)^2 - n_1 n_2 = n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2$. Un punto qualunque di questa curva, come appartenente a Φ_2, è comune a due superficie corrispondenti T, T' dei fasci (R, P), (R', P'), e come appartenente a Φ_3, è comune a due superficie corrispondenti U, U' dei fasci (P, Q), (P', Q'). I due fasci (Q, R), (T, U), appartenendo alla stessa rete, avranno una superficie comune S, alla quale corrisponderà una superficie S' comune ai due fasci (Q', R'), (T', U'). Quindi ogni punto comune alle superficie Φ_2, Φ_3, cioè alle $TT'\,UU'$, sarà un punto-base dei fasci (TU), $(T'U')$, epperò comune alle superficie S, S', e conseguentemente alla Φ_1. Dunque la curva d'ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2$, che insieme colla PP' forma l'intersezione delle superficie Φ_2, Φ_3, è situata anche in Φ_1; ond'è ch'essa costituirà la base della rete delle superficie Φ. (Questa rete è determinata dalle superficie Φ_1, Φ_2, Φ_3 che non appartengono ad uno stesso fascio, perchè la curva PP' non giace in Φ_1). Dunque:

Le superficie d'ordine $n_1 + n_2$, che contengono le curve d'intersezione delle superficie corrispondenti di due reti projettive d'ordini n_1, n_2, formano una nuova rete e passano tutte per una stessa curva gobba d'ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2$.

Due superficie della prima rete si segano secondo una curva d'ordine n_1^2, alla quale corrisponde una curva d'ordine n_2^2 nella seconda rete (*). Due curve siffatte in generale non si segano; ma quelle che si incontrano formano coi punti comuni la curva d'ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2$, anzidetta. In altre parole questa curva è il luogo di un punto comune alle basi di due fasci corrispondenti; mentre in generale per un punto arbitrario dello spazio non passa che una coppia di superficie corrispondenti.

103. Siano date tre reti projettive di superficie, i cui ordini siano rispettivamente n_1, n_2, n_3; quale sarà il luogo di un punto pel quale passino tre superficie corrispondenti? Sia T una trasversale arbitraria, i un punto arbitrario in T: per i passano due superficie corrispondenti delle prime due reti; ma la corrispondente superficie della terza rete incontrerà T in n_3 punti i'. Assunto invece ad arbitrio un punto i' in T, le superficie della terza rete passanti per i' formano un fascio, al quale corrispondono nelle prime due reti due altri fasci projettivi che generano (91) una superficie d'ordine $n_1 + n_2$, e questa incontrerà T in $n_1 + n_2$ punti i. Dunque:

Il luogo dei punti comuni a tre superficie corrispondenti in tre reti projettive i cui ordini siano n_1, n_2, n_3 è una superficie d'ordine $n_1 + n_2 + n_3$.

Questa superficie passa 1.° per gli n_1^3 punti base della prima rete, ecc. 2.° per infinite curve gobbe d'ordine $n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$ generate (98) da tre fasci corrispondenti nelle tre reti; 3.° per la curva d'ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2$ generata (102) dalle prime due reti, ecc.

(*) Chiamando *corrispondenti* due curve che nascano dall'intersezione di due coppie di superficie corrispondenti.

104. Quale è il luogo dei poli di un piano rispetto alle superficie di una rete d' ordine n? Siano a, b, c tre punti (non in linea retta) del piano dato (99); le prime polari di a, b, c formano tre reti projettive d'ordine $n-1$, epperò (103):

Il luogo dei poli di un piano rispetto alle superficie d' una rete d' ordine n è una superficie d' ordine $3(n-1)$.

Questa superficie contiene infinite curve gobbe d' ordine $3(n-1)^2$, ciascuna delle quali è il luogo dei poli del piano dato rispetto alle superficie di un fascio contenuto nella rete data.

Ogni punto del luogo, situato nel piano dato, è evidentemente (64) un punto di contatto fra questo piano ed una superficie della rete; dunque:

Il luogo dei punti di contatto fra un piano e le superficie di una rete d' ordine n è una curva d' ordine $3(n-1)$.

Questa curva è la Jacobiana (*) della rete formata dalle curve secondo le quali le superficie della rete sono intersecate dal piano dato.

105. Date quattro reti projettive di superficie d' ordini n_1, n_2, n_3, n_4, quale sarà il luogo di un punto ove si seghino quattro superficie corrispondenti? Le prime due reti combinate successivamente colla terza e colla quarta generano (103) due superficie d' ordini $n_1+n_2+n_3$, $n_1+n_2+n_4$. Queste hanno in comune la curva d'ordine $n_1^2+n_2^2+n_1 n_2$ generata (102) dalle prime due reti; esse si segheranno inoltre secondo una curva d' ordine $(n_1+n_2+n_3)(n_1+n_2+n_4)-(n_1^2+n_2^2+n_1 n_2)$; dunque:

Il luogo di un punto pel quale passino quattro superficie corrispondenti di quattro reti projettive, i cui ordini siano n_1, n_2, n_3, n_4, è una curva gobba d' ordine $n_1 n_2+n_2 n_3+n_3 n_4+n_4 n_1+n_1 n_3+n_4 n_2$.

Questa curva contiene evidentemente infiniti sistemi di $n_2 n_3 n_4+n_3 n_4 n_1+n_4 n_1 n_2+n_1 n_2 n_3$ punti generati (100) da quattro fasci corrispondenti nelle quattro reti.

106. Quale è il luogo dei punti doppi delle superficie di una rete d' ordine n? Siano a, b, c, d quattro punti presi ad arbitrio nello spazio (non in uno stesso piano); le loro prime polari rispetto alle superficie date formeranno (74) quattro reti projettive alla data, epperò projettive fra loro; e il luogo richiesto sarà (101) quello dei punti pei quali passano quattro superficie corrispondenti di queste quattro reti; dunque (105):

Il luogo dei punti doppi delle superficie di una rete d' ordine n è una curva gobba d' ordine $6(n-1)^2$.

Questa curva contiene infiniti gruppi di $4(n-1)^3$ punti, ciascun gruppo essendo costituito dai punti doppi di un fascio contenuto nella rete (101).

Le superficie di una rete che passano per uno stesso punto arbitrario formano un fascio; ora, se quel punto è doppio per una di esse superficie, le

---

(*) *Introd.* 95.

altre hanno ivi lo stesso piano tangente; dunque l' anzidetta curva d' ordine $6(n-1)^2$ può anche definirsi il luogo dei punti di contatto fra le superficie della rete.

107. Date cinque reti projettive di superficie d'ordini n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, quanti sono i punti pei quali passano cinque superficie corrispondenti? Le prime due reti combinate colla terza, poi colla quarta e da ultimo colla quinta, generano (103) tre superficie d'ordini $n_1+n_2+n_3$, $n_1+n_2+n_4$, $n_1+n_2+n_5$, che hanno in comune la curva d' ordine $n_1^2+n_2^2+n_1n_2$ relativa (102) alle prime due reti. Si calcoli il rango di questa curva, osservando che (102) essa, insieme con un' altra curva d' ordine $n_1 n_2$, forma la completa intersezione di due superficie d' ordine n_1+n_2. Quest' ultima curva, essendo la completa intersezione di due superficie d' ordini n_1, n_2, ha per sviluppabile osculatrice (95) una superficie d' ordine $n_1 n_2(n_1+n_2-2)$; dunque il rango della curva $(n_1^2+n_2^2+n_1n_2)$ sarà (96) $2(n_1+n_2-1)(n_1^2+n_2^2)+n_1n_2(n_1+n_2-2)$.

Ciò premesso, le tre superficie d' ordini $n_1+n_2-n_3$, $n_1+n_2+n_4$, $n_1+n_2+n_5$, passando insieme per la predetta curva $(n_1^2+n_2^2+n_1n_1)$ avranno (97), all' infuori di essa,

$$(n_1+n_2+n_3)(n_1+n_2+n_4)(n_1+n_2+n_5)$$
$$-(n_1^2+n_2^2+n_1n_2)[(n_1+n_2+n_3)+(n_1+n_2+n_4)+(n_1+n_2+n_5)-2]$$
$$+2(n_1+n_2-1)(n_1^2+n_2^2)+n_1n_2\ (n_1+n_2-2)$$

punti comuni; dunque:

Il numero dei punti pei quali passano cinque superficie corrispondenti di cinque reti projettive d'ordini $n_1, n_2, .. n_5$, è

$$n_1n_2n_3+n_1n_2n_4+\ldots+n_3n_4n_5.$$

Questi punti sono situati nelle dieci superficie generate dalle reti prese a tre a tre (103), ed anche nelle cinque curve generate dalle reti prese a quattro a quattro (105).

108. Quale è il luogo di un punto che abbia lo stesso piano polare rispetto ad una superficie data d' ordine n_1 e rispetto ad una delle superficie di una rete d' ordine n_2? Sia x un punto qualunque di una trasversale; X il piano polare di x rispetto alla superficie (n_1). Il luogo dei poli di X rispetto alle superficie (n_2) è (104) una superficie d' ordine $3(n_2-1)$, che incontrerà la trasversale in $3(n_2-1)$ punti x'. Viceversa, assunto ad arbitrio nella trasversale il punto x', i piani polari di x' rispetto alle superficie (n_2) formano una rete (74), cioè passano per uno stesso punto, epperò fra essi ve ne saranno n_1-1 tangenti alla sviluppabile (87) inviluppata dai piani polari dei punti della trasversale, rispetto alla superficie (n_1). Questi n_1-1 piani saranno polari (rispetto alla superficie (n_1)) di altrettanti punti x della trasversale; dunque:

Il luogo di un punto che abbia lo stesso piano polare rispetto ad una superficie fissa d' ordine n_1 e ad alcuna delle superficie di una rete d' ordine n_2, è una superficie d' ordine n_1+3n_2-4.

È evidente che questa superficie passa per la curva gobba d' ordine $6(n_2 - 1)^2$, luogo dei punti doppi delle superficie della rete (106); perchè ciascun punto di questa curva ha il piano polare indeterminato rispetto ad una superficie della rete.

Ogni punto comune al luogo trovato ed alla superficie (n_1) data è, rispetto a questa, il polo del piano tangente nel punto medesimo; ma esso punto deve avere lo stesso piano polare rispetto ad una superficie della rete; dunque (64) ogni punto comune al luogo ed alla superficie fissa è un punto di contatto tra questa ed alcuna superficie della rete. Ossia:

Il luogo dei punti di contatto fra una superficie fissa d' ordine n_1 e le superficie di una rete d' ordine n_2 è una curva gobba d' ordine $n_1(n_1 + 3n_2 - 4)$.

109. Dato un fascio di superficie d' ordine n_1, e data una rete di altre superficie d' ordine n_2, quale sarà il luogo di un punto ove una superficie del fascio tocchi una superficie della rete? Il luogo passa per la curva d' ordine n_1^2 base del fascio, perchè (*) le superficie (n_2) che passano per un punto di questa curva formano un fascio nel quale vi è una superficie che ivi tocca una delle superficie (n_1). Inoltre ciascuna delle superficie (n_1) contiene una curva d' ordine $n_1(n_1 + 3n_2 - 4)$ nei punti della quale (108) essa è toccata dalle superficie (n_2). Dunque l' intersezione completa di una superficie (n_1) col luogo cercato è dell' ordine $n_1^2 + n_1(n_1 + 3n_2 - 4)$, epperò:

Il luogo dei punti di contatto fra le superficie d' ordine n_1 di un fascio e le superficie d' ordine n_2 di una rete è una superficie d' ordine $2n_1 + 3n_2 - 4$.

Se $n_2 = n_1 = n$, e se inoltre la rete ed il fascio hanno una superficie comune, siccome avviene quando fanno parte di un medesimo sistema lineare, il luogo si decomporrà in questa superficie ed in un' altra d'ordine $2n + 3n - 4 - n = 4(n - 1)$. Allora, se una superficie della rete ed una del fascio si toccano in un punto, esse individuano un fascio di superficie che tutte si toccano nello stesso punto e che appartengono al sistema lineare determinato dalla rete e dal fascio dato; fra queste superficie ve ne sarà una per la quale quel punto di contatto sarà doppio (17; 92, *nota* 1[a]); dunque:

Il luogo dei punti di contatto ossia dei punti doppi delle superficie di un sistema lineare d' ordine n è una superficie d' ordine $4(n - 1)$.

(*) Quando due fasci di superficie hanno un punto-base comune o, vi è sempre una superficie del primo fascio che ivi tocca una del secondo. In fatti i piani tangenti in o alle superficie del primo fascio passano per una medesima retta che è la tangente in o alla curva-base di esso fascio; e così pure la tangente in o alla curva-base del secondo fascio è la retta per la quale passano i piani tangenti in questo punto alle superficie del secondo fascio medesimo. Dunque il piano delle due tangenti toccherà in o una superficie del primo fascio ed una del secondo.

Sistemi lineari projettivi (di terzo genere).

110. Siano dati due sistemi lineari projettivi di superficie d'ordini n_1, n_2; e siano P, P', Q, Q', R, R', S, S' quattro coppie di superficie corrispondenti. I fasci projettivi (P, Q), (P', Q'), formati da superficie corrispondenti dei due sistemi, genereranno (91) una superficie d'ordine $n_1 + n_2$; una superficie analoga sarà generata dai fasci (P, R), (P', R'), ed un'altra dai fasci (P, S), (P', S'). Queste tre superficie d'ordine $n_1 + n_2$ hanno in comune la curva d'ordine $n_1 n_2$, intersezione delle superficie P, P', epperò si segheranno (97) in altri $(n_1 + n_2)(n_1^2 + n_2^2)$ punti. Uno qualunque, x, di questi è situato in certe superficie Q_o, R_o, S_o appartenenti rispettivamente ai fasci (P, Q), (P, R), (P, S), ed anche nelle superficie corrispondenti Q_o', R_o', S_o', che appartengono rispettivamente ai fasci (P', Q'), (P', R'), (P', S'). Il punto x è adunque un punto-base comune ai fasci (Q_o, R_o), (Q_o', R_o'); ma il primo di questi ha una superficie comune col fascio (Q, R), ed il secondo ha una superficie comune col fascio (Q', R'), e queste due superficie sono corrispondenti; perciò il punto x è situato anche nella superficie generata dai fasci projettivi (Q, R), (Q', R'). Ossia:

Dati due sistemi lineari projettivi di superficie d'ordini n_1, n_2, le superficie d'ordine $n_1 + n_2$, ciascuna delle quali è generata da due fasci formati da superficie corrispondenti nei due sistemi, passano tutte per gli stessi $(n_1 + n_2)(n_1^2 + n_2^2)$ punti.

Questi punti sono quelli pei quali passano infiniti fasci di superficie corrispondenti; ossia ciascuno d'essi è un punto-base comune a due reti corrispondenti.

111. Date due superficie d'ordini n_1, n_2, quanti sono i punti che hanno lo stesso piano polare rispetto ad entrambe? Le prime polari di tutti i punti dello spazio rispetto all'una e all'altra superficie data formano (82) due sistemi lineari projettivi d'ordini $n_1 - 1$, $n_2 - 1$. Se un punto o ha lo stesso piano polare rispetto alle due superficie, le prime polari di tutti i punti di questo piano passeranno per o, cioè o sarà un punto-base comune a due reti corrispondenti ne' due sistemi. Dunque (110):

Il numero dei punti che hanno lo stesso piano polare rispetto a due superficie d'ordini n_1, n_2 è $(n_1 + n_2 - 2)\left[(n_1 - 1)^2 + (n_2 - 1)^2\right]$. Il complesso di questi punti si può chiamare *Jacobiana delle due superficie date.*

Se $n_1 = n_2 = n$, si trova (101) il numero dei punti doppi di un fascio di superficie d'ordine n. Dunque i $4(n-1)^3$ punti doppi di un fascio costituiscono la Jacobiana di due qualunque fra le superficie del fascio.

Se $n_2 = 1$, $n_1 = n$, si ritrovano (81) gli $(n-1)^3$ poli di un piano dato rispetto ad una superficie d'ordine n. Cioè gli $(n-1)^3$ poli di un piano rispetto ad una superficie d'ordine n costituiscono la Jacobiana di due superficie, una delle quali è il piano dato e l'altra è la superficie fondamentale.

112. Siano dati tre sistemi lineari projettivi di superficie, i cui ordini siano rispettivamente n_1, n_2, n_3. Una rete qualunque del primo sistema, insieme colle reti corrispondenti negli altri due sistemi, genererà (110) una superficie Ψ d' ordine $n_1 + n_2 + n_3$. Queste superficie Ψ formano un nuovo sistema lineare. In fatti, se a, b, c sono tre punti presi ad arbitrio nello spazio, le superficie del primo sistema passanti per a formano una rete; e nella corrispondente rete del secondo sistema v' è un fascio di superficie passanti per a, al quale corrisponderà nella terza rete un fascio contenente una superficie passante per a. Vi sono dunque tre superficie corrispondenti P, P', P'' passanti per a, e così tre superficie corrispondenti Q, Q', Q'' passanti per b, e tre altre R, R', R'' passanti per c. Le quali superficie individuano tre reti projettive (P, Q, R), (P', Q', R'), (P'', Q'', R''), e queste genereranno una superficie Ψ, la sola che passi per a, b, c.

Sia S, S', S'' un' altra terna di superficie corrispondenti nei tre sistemi, le quali non appartengano rispettivamente alle tre reti predette. Le reti (P, Q, S), (P', Q', S'), (P'', Q'', S'') genereranno un'altra superficie Ψ_1; le reti (P, R, S), (P', R', S'), (P'', R'', S'') una terza superficie Ψ_2; e le reti (Q, R, S), (Q', R', S'), (Q'', R'', S'') una quarta superficie Ψ_3.

Le due superficie Ψ, Ψ_1 passano per la curva d'ordine $n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2$, generata (98) dai tre fasci projettivi (P, Q), (P', Q'), (P'', Q''), epperò si segheranno secondo un'altra curva dell'ordine $(n_1 + n_2 + n_3)^2 - (n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2) = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2$. Un punto qualunque x di questa curva, come appartenente a Ψ, è comune a tre superficie corrispondenti A, A', A'' delle reti (P, Q, R), (P', Q', R'), (P'', Q'', R''); e come appartenente a Ψ_1, lo stesso punto x è comune a tre superficie corrispondenti B, B', B'' delle reti (P, Q, S), (P', Q', S'), (P'', Q'', S''). La rete (P, R, S) ed il fascio (A, B), come facienti parte di uno stesso sistema lineare, hanno una superficie comune C, alla quale corrisponderà nel secondo sistema una superficie C' comune alla rete (P', R', S') ed al fascio (A', B'), e nel terzo sistema una superficie C'' comune alla rete (P'', R'', S'') ed al fascio (A'', B''). Dunque x sarà un punto-base comune ai fasci (A, B), (A', B'), (A'', B''), epperò comune alle superficie C, C', C'', che sono tre superficie corrispondenti nelle tre reti projettive (P, R, S), (P', R', S'), (P'', R'', S''); cioè x è un punto della superficie Ψ_2. Analogamente si dimostra che lo stesso punto è situato nella superficie Ψ_3. Dunque:

Dati tre sistemi lineari projettivi di superficie d' ordini n_1, n_2, n_3, il luogo di un punto pel quale passino infinite terne di superficie corrispondenti è una curva gobba d' ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2$.

Essa può anche definirsi il luogo di un punto-base comune a tre fasci corrispondenti, ovvero il luogo dei punti d' incontro fra le curve corrispondenti d' ordini n_1^2, n_2^2, n_3^2; ed è situata sopra tutte le superficie (formanti un sistema lineare) d' ordine $n_1 + n_2 + n_3$, ciascuna delle quali è generata da tre reti corrispondenti nei tre sistemi.

113. Date tre superficie d' ordini n_1, n_2, n_3, quale è il luogo di un punto x i cui piani polari rispetto a quelle passino per una medesima retta X? Le prime polari dei punti dello spazio relative alle superficie date formano tre

sistemi lineari projettivi d' ordini $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, $n_3 - 1$. Per l' ipotesi fatta, x è l' intersezione delle prime polari di ogni punto di X, ossia un punto pel quale passano infinite terne di superficie corrispondenti de' tre sistemi projettivi suddetti; dunque (112) il luogo richiesto è una curva gobba d' ordine $(n_1 - 1)^2 + (n_2 - 1)^2 + (n_3 - 1)^2 + (n_2 - 1)(n_3 - 1) + (n_3 - 1)(n_1 - 1) + (n_1 - 1)(n_2 - 1)$, alla quale daremo il nome di *Jacobiana delle tre superficie date.* Dunque:

La Jacobiana di tre superficie d' ordini n_1, n_2, n_3, ossia il luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle superficie date passino per una medesima retta, è una curva gobba d' ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - 4(n_1 + n_2 + n_3) + 6$.

È evidente che questa curva passa pei punti di contatto fra le superficie date, e pei loro punti doppi (se ve ne sono).

La stessa curva passerà anche pei punti che hanno un medesimo piano polare rispetto a due delle superficie date; ossia la Jacobiana di tre superficie passa per le Jacobiane delle stesse superficie prese a due a due (111).

Se $n_3 = n_2$, il piano polare del punto x rispetto alla superficie (n_1), passando per la retta secondo la quale si segano i piani polari dello stesso punto rispetto alle superficie del fascio determinato dalle due date superficie d'ordine n_2, coinciderà col piano polare di x rispetto ad una superficie del fascio; quindi:

Il luogo di un punto che abbia lo stesso piano polare rispetto ad una superficie fissa d' ordine n_1 e ad alcuna delle superficie d' un fascio d' ordine n_2, è una curva gobba d' ordine $n_1^2 + 3n_2^2 + 2n_1 n_2 - 4n_1 - 8n_2 + 6$, che passa pei punti doppi del fascio.

I punti in cui questa curva incontra la superficie fissa sono evidentemente quelli in cui questa superficie è toccata da qualche superficie del fascio; dunque:

Il numero delle superficie di un fascio d' ordine n_2 che toccano una superficie fissa d' ordine n_1 è

$$n_1(n_1^2 + 3n_2^2 + 2n_1 n_2 - 4n_1 - 8n_2 + 6).$$

Se $n_1 = n_2 = n_3$, le tre superficie date determinano una rete, ed i piani polari del punto x rispetto a tutte le superficie di questa rete passeranno per una medesima retta. Si ritrova così un teorema già dimostrato (106); dunque:

Il luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle superficie di una rete d' ordine n passino per una stessa retta, ossia il luogo dei punti doppi delle superficie di questa rete, ossia il luogo dei punti di contatto fra le superficie della rete medesima, è una curva gobba d' ordine $6(n - 1)^2$.

A questa curva possiamo dare il nome di *Jacobiana della rete.*

Se una delle superficie date è un piano, il piano polare relativo ad essa coincide col piano dato; dunque:

Il luogo di un punto i cui piani polari relativi a due date superficie d' ordini n_1, n_2 si seghino lungo una retta situata in un piano fisso è una curva gobba d' ordine $(n_1 - 1)^2 + (n_2 - 1)^2 + (n_1 - 1)(n_2 - 1)$.

Se $n_1 = n_2$, si ricade in un teorema già dimostrato (99); dunque:

La curva d' ordine $3(n-1)^2$, luogo dei poli di un piano dato rispetto alle superficie di un fascio d' ordine n, è la Jacobiana di tre superficie, una delle quali è il piano dato, e le altre sono due superficie qualunque del fascio.

Se $n_2 = n_3 = 1$, $n_1 = n$, il piano polare di x rispetto alla superficie d' ordine n passerà per una retta fissa (intersezione di due piani dati); dunque (80):

La curva d' ordine $(n-1)^2$, luogo dei punti i cui piani polari rispetto ad una superficie d' ordine n passano per una retta data, è la Jacobiana di tre superficie, una delle quali è la superficie fondamentale, e le altre sono due piani qualunque passanti per la retta data.

114. Dati quattro sistemi lineari projettivi di superficie d' ordini n_1, n_2, n_3, n_4, cerchiamo il luogo di un punto pel quale passino quattro superficie corrispondenti. In una trasversale arbitraria si prenda un punto qualunque i, pel quale passeranno tre superficie corrispondenti dei primi tre sistemi; la superficie corrispondente del quarto segherà la trasversale in n_4 punti i'. Se invece si prende ad arbitrio nella trasversale un punto i', le superficie del quarto sistema passanti per i' formano una rete, e le tre reti corrispondenti negli altri sistemi generano (103) una superficie d'ordine $n_1 + n_2 + n_3$ che incontrerà la trasversale in altrettanti punti i. Dunque:

Il luogo di un punto pel quale passino quattro superficie corrispondenti di quattro sistemi lineari projettivi d' ordini n_1, n_2, n_3, n_4 è una superficie d' ordine $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Questa superficie contiene manifestamente infinite curve, ciascuna delle quali è generata (105) da quattro reti corrispondenti nei quattro sistemi; ed infinite altre curve, ciascuna delle quali è generata (112) da tre dei sistemi dati; ecc.

115. Date quattro superficie d'ordini n_1, n_2, n_3, n_4, quale è il luogo di un punto x, i cui piani polari rispetto a quelle passino per uno stesso punto x'? Le prime polari di x' passeranno per x; e d' altronde le prime polari dei punti dello spazio rispetto alle quattro superficie date formano quattro sistemi lineari projettivi d' ordini $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, $n_3 - 1$, $n_4 - 1$; dunque (114):

Il luogo di un punto i cui piani polari rispetto a quattro superficie date d' ordini n_1, n_2, n_3, n_4 passino per uno stesso punto, è una superficie d' ordine $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4$.

Questa superficie, alla quale daremo il nome di *Jacobiana delle quattro superficie date*, passa evidentemente pei punti doppi di queste, e per le Jacobiane delle medesime prese a tre a tre, ovvero a due a due.

Se $n_4 = n_3$, otteniamo una superficie d' ordine $n_1 + n_2 + 2(n_3 - 2)$, luogo di un punto i cui piani polari rispetto a due superficie d' ordini n_1, n_2 ed a tutte le superficie d' un fascio d' ordine n_3 passino per uno stesso punto. Se x è un punto comune al luogo ed alla curva d' ordine $n_1 n_2$, intersezione delle due superficie date, la tangente in x a questa curva e la retta per la quale passano i piani polari di x rispetto alle superficie del fascio, incontrandosi, determinano un piano che toccherà in x una superficie del fascio; dunque:

In un fascio di superficie d' ordine n_3 ve ne sono $n_1 n_2(n_1 + n_2 + 2n_3 - 4)$ che toccano la curva d' intersezione di due superficie d' ordini n_1, n_2.

Se $n_4 = n_3 = n_2$, siccome il piano polare di x rispetto alla superficie (n_1) passa pel punto ove concorrono i piani polari dello stesso punto rispetto a tutte le superficie della rete determinata dalle tre superficie date d' ordine n_2, così ne segue che quel piano sarà anche il polare di x rispetto ad alcuna delle superficie della rete. Ricadiamo così in un teorema già dimostrato (108); dunque:

La superficie d' ordine $n_1 + 3n_2 - 4$, luogo di un punto avente lo stesso piano polare rispetto ad una superficie fissa d' ordine n_1 e ad una delle superficie d' una rete d'ordine n_2, è la Jacobiana di quattro superficie, una delle quali è la superficie data d' ordine n_1 e le altre sono tre qualunque (purchè non formanti un fascio) delle superficie della rete.

Se $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$, le quattro superficie date determinano un sistema lineare; e per x' passerà il piano polare di x rispetto a qualunque superficie del sistema (74); dunque:

Il luogo di un punto i cui piani polari rispetto alle superficie di un sistema d' ordine n passino per uno stesso punto è una superficie d' ordine $4(n-1)$.

Questa superficie, essendo la Jacobiana di quattro superficie qualunque (non formanti una rete) del sistema, può anche definirsi come il luogo dei punti doppi delle superficie del sistema, ovvero come il luogo dei punti di contatto fra le superficie medesime.

A questa superficie daremo il nome di *Jacobiana del sistema lineare*.

Se $n_2 = 1$, abbiamo il teorema:

Il luogo di un punto i cui piani polari rispetto a tre superficie d' ordini n_1, n_2, n_3 si seghino sopra un piano dato, è una superficie d' ordine $n_1 + n_2 + n_3 - 3$.

Se inoltre è $n_1 = n_2 = n_3 = n$, ricadiamo in un teorema già dimostrato (104); dunque:

La superficie d' ordine $3(n-1)$, luogo dei poli di un piano rispetto alle superficie di una rete d' ordine n, è la Jacobiana di quattro superficie, cioè del piano dato e di tre superficie qualunque (non formanti un fascio) della rete.

Se $n_3 = n_4 = 1$, ritroviamo ancora un teorema noto (95); dunque:

La superficie d' ordine $n_1 + n_2 - 2$, luogo di un punto i cui piani polari rispetto a due superficie d' ordini n_1, n_2 si seghino sopra una retta data, è la Jacobiana di quattro superficie, cioè delle due superficie date e di due piani qualunque passanti per la retta data.

Se inoltre $n_1 = n_2 = n$, la retta data incontrando quella lungo la quale si segano i piani polari del punto x rispetto alle superficie del fascio determinato dalle due superficie date d' ordine n, le due rette giacciono in un piano che sarà il polare di x, rispetto ad una superficie del fascio; dunque:

Il luogo di un punto il cui piano polare rispetto ad una superficie d' un fascio d' ordine n passi per una retta data, è una superficie d' ordine $2(n-1)$. Questa superficie è la Jacobiana di quattro superficie, due delle quali appartengono al fascio, mentre le altre sono due piani passanti per la retta data.

Da ultimo, se $n_2 = n_3 = n_4 = 1$, $n_1 = n$, si ricade nel teorema (62) che il luogo di un punto il cui piano polare rispetto ad una superficie d' ordine n passi per un punto fisso è una superficie d' ordine $n - 1$ (la prima polare del punto fisso). Dunque:

La prima polare di un punto dato è la Jacobiana di quattro superficie: la superficie fondamentale e tre piani passanti pel punto dato.

116. Dati cinque sistemi lineari projettivi di superficie d' ordini n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, quale è il luogo di un punto ove si seghino cinque superficie corrispondenti? I primi tre sistemi combinati col quarto e poi col quinto generano (114) due superficie d'ordini $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, $n_1 + n_2 + n_3 + n_5$, le quali hanno in comune la curva d'ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2$ generata (112) dai primi tre sistemi; esse si segheranno inoltre secondo un' altra curva d' ordine

$$(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)(n_1 + n_2 + n_3 + n_5) - (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2);$$

dunque:

Il luogo di un punto pel quale passino cinque superficie corrispondenti di cinque sistemi lineari projettivi d' ordini $n_1, \ldots, n_5$ è una curva gobba d' ordine $n_1n_2 + n_1n_3 + \ldots + n_4n_5$.

Naturalmente questa curva è situata sopra le cinque superficie generate dai cinque sistemi presi a quattro a quattro (114), e contiene infiniti gruppi di $n_1n_2n_3 + \ldots + n_3n_4n_5$ punti, ogni gruppo essendo generato (107) da cinque reti corrispondenti nei sistemi dati.

117. Dati sei sistemi lineari projettivi di superficie d' ordini $n_1, n_2, \ldots n_6$, quanti sono i punti nei quali si segano sei superficie corrispondenti? I primi tre sistemi combinati col quarto, poi col quinto e da ultimo col sesto, generano (114) tre superficie d' ordini $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, $n_1 + n_2 + n_3 + n_5$, $n_1 + n_2 + n_3 + n_6$, le quali hanno in comune la curva d' ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2$ generata (112) dai primi tre sistemi. Questa cur-

va appartiene a due superficie d' ordine $n_1 + n_2 + n_3$, che si segano inoltre secondo un' altra curva d' ordine $n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2$, la quale, alla sua volta, forma insieme con una terza curva d'ordine n_1^2 la completa intersezione (98) di due superficie d' ordini $n_1 + n_2$, $n_1 + n_3$. L' ordine della sviluppabile osculatrice (95) della curva (n_1^2) è $r = 2n_1^2(n_1 - 1)$, quindi (96) il rango della curva $(n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2)$ sarà

$$r' = \{(n_1 + n_2) + (n_1 + n_3) - 2\} \{n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - n_1^2\} + r$$

$$= (n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)(n_1 + n_2 + n_3 - 2) + n_1 n_2 n_3 .$$

Di qui si conclude (96) che la curva d' ordine $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2$ è del rango

$$r'' = \{(n_1 + n_2 + n_3) + (n_1 + n_2 + n_3) - 2\} \{ (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2) - (n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2) \} + r' =$$

$$= 2(n_1 + n_2 + n_3 - 1)(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + (n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)(n_1 + n_2 + n_3 - 2) + n_1 n_2 n_3 ,$$

epperò le tre superficie d' ordini $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, $n_1 + n_2 + n_3 + n_5$, $n_1 + n_2 + n_3 + n_6$, oltre alla predetta curva, avranno (97)

$$(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)(n_1 + n_2 + n_3 + n_5)(n_1 + n_2 + n_3 + n_6) - (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2) \{(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + (n_1 + n_2 + n_3 + n_5) + (n_1 + n_2 + n_3 + n_6) - 2 \} + r'' = (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)(n_1 + n_2 + n_3 + n_5)$$

$$(n_1 + n_2 + n_3 + n_6) - (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)(n_4 + n_5 + n_6)$$

$-(n_1 + n_2 + _3)^3 + n_1 n_2 n_3 = n_1 n_2 n_3 + \ldots + n_4 n_5 n_6$ punti comuni; dunque:

Il numero dei punti dello spazio pei quali passano sei superficie corrispondenti di sei sistemi lineari projettivi d' ordini $n_1, n_2, \ldots n_6$ *è* $n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2 n_4 + \ldots + n_4 n_5 n_6$.

Sistemi lineari projettivi di genere qualunque.

118. Dati $m + 1$ sistemi lineari projettivi di genere m di superficie d' ordini $n_1, n_2, \ldots n_{m+1}$ (*), quale è il luogo di un punto pel quale passino

(*) Indicheremo per brevità col simbolo $s_{m,r}$ la somma dei prodotti dei numeri $n_1, n_2, \ldots n_m$ presi ad r ad r.

$m+1$ superficie corrispondenti? In una trasversale arbitraria sia preso un punto i; per esso passeranno m superficie corrispondenti dei primi m sistemi dati (*), e la corrispondente superficie dell' ultimo sistema incontrerà la trasversale in n_{m+1} punti i'. Se invece si assume ad arbitrio nella trasversale un punto i', le superficie dell' ultimo sistema passanti per questo punto formano un sistema inferiore di genere $m-1$, al quale corrisponderanno, ne' primi sistemi dati, m sistemi inferiori dello stesso genere $m-1$. Essendo questi sistemi projettivi, suppongasi che il luogo di un punto pel quale passino m superficie corrispondenti sia una superficie d' ordine $s_{m,1}$. Questa segherà la trasversale in $s_{m,1}$ punti i; epperò $s_{m,1}+n_{m+1}$ sarà il numero delle coincidenze di i con i'. Cioè, se la proposizione: « il luogo richiesto è una superficie d' ordine $s_{m+1,1}$ » è vera per $m-1$, essa è vera anche per m. Ma noi l' abbiamo già dimostrata (91, 98, 114) per $m=1, 2, 3$, dunque:

Il luogo di un punto pel quale passino $m+1$ superficie corrispondenti (d' ordini $n_1, n_2, ..$) d' altrettanti sistemi lineari projettivi di genere m è una superficie d' ordine $s_{m+1,1}$.

119. Dati $m+2$ sistemi lineari projettivi (di superficie d' ordini $n_1, n_2, .., n_{m+2}$) di genere m, si domanda il luogo di un punto pel quale passino $m+2$ superficie corrispondenti? I primi m sistemi combinati successivamente col penultimo e coll' ultimo generano (118) due superficie d' ordini $s_{m,1}+n_{m+1}$, $s_{m,1}+n_{m+2}$. Queste avranno evidentemente in comune la curva luogo di un punto pel quale passino infiniti gruppi di m superficie corrispondenti de' primi m sistemi dati. Supponiamo che l' ordine di questa curva sia $s^2_{m,1}-s_{m,2}$. Allora le due superficie si segheranno lungo un' altra curva d' ordine

$$(s_{m,1}+n_{m+1})(s_{m,1}+n_{m+2})-(s^2_{m,1}-s_{m,2})$$

ossia d' ordine $s_{m+2,2}$, in virtù della seconda fra le identità:

$$s_{m+2,1}=s_{m,1}+n_{m+1}+n_{m+2},$$

$$s_{m+2,2}=s_{m,2}+(n_{m+1}+n_{m+2})\,s_{m,1}+n_{m+1}\,n_{m+2},$$

$$s_{m+2,3}=s_{m,3}+(n_{m+1}+n_{m+2})\,s_{m,2}+n_{m+1}\,n_{m+2}\,s_{m,1}.$$

La seconda curva è il luogo domandato.

120. Siano dati ora $m+2$ sistemi lineari projettivi (di superficie d' ordini $n_1, n_2, .., n_{m+2}$) di genere $m+2$. Un sistema inferiore di genere $m+1$

(*) Le superficie dell' m^{mo} sistema passanti per i formano un sistema di genere $m-1$, al quale corrisponderanno (ne' primi $m-1$ sistemi dati) $m-1$ sistemi inferiori dello stesso genere $m-1$. Supposto che questi abbiano $m-1$ superficie corrispondenti passanti par i, anche i primi m sistemi dati avranno m superficie corrispondenti passanti per i; cioè se l' asserzione sussiste per $m-1$, essa è vera anche per m; dunque ecc.

contenuto nel primo sistema dato ed i sistemi inferiori corrispondenti negli altri sistemi dati generano una superficie d' ordine $s_{m+2,1}$ (118). Due superficie d' ordine $s_{m+2,1}$, così ottenute, corrispondono per ciascun sistema dato a due sistemi inferiori di genere $m+1$ (contenuti in uno stesso sistema dato), i quali avranno in comune un sistema minore di genere m. Perciò le due superficie contengono la curva d' ordine $s_{m+2,2}$ generata (119) dagli $m+2$ sistemi minori corrispondenti di genere m; e quindi si segheranno lungo un' altra curva d' ordine $s^2_{m+2,1} - s_{m+2,2}$; la quale è situata in tutte le analoghe superficie d' ordine $s_{m+2,1}$ (*), epperò è il luogo dei punti pei quali passano infiniti gruppi di $m+2$ superficie corrispondenti di altrettanti sistemi lineari projettivi di genere $m+2$.

Dunque, se m sistemi di genere m generano una curva d' ordine $s^2_{m,1} - s_{m,2}$, anche $m+2$ sistemi di genere $m+2$ genereranno una curva d'ordine $s^2_{m+2,1} - s_{m+2,2}$; e l' ordine della curva generata da $m+2$ sistemi di genere m sarà $s_{m+2,2}$. Ora l' ipotesi fatta ha luogo per $m=1, 2, 3$; per conseguenza ecc.

121. Ammettiamo che il rango della curva d' ordine $s_{m,2}$ generata (120) da m sistemi lineari projettivi di genere $m-2$ sia

$$(s_{m,1} - 2)\, s_{m,2} + s_{m,3}.$$

Allora, siccome questa curva, insieme con quella d'ordine $s^2_{m,1} - s_{m,2}$ generata da m sistemi lineari projettivi di genere m (de' quali facciano parte come sistemi minori corrispondenti gli anzidetti sistemi di genere $m-2$), forma la completa intersezione di due superficie d' ordine $s_{m,1}$ (121), così il rango dell' ultima curva sarà (96)

$$2(s_{m,1} - 1)(s^2_{m,1} - 2s_{m,2}) + (s_{m,1} - 2)\, s_{m,2} + s_{m,3}.$$

Quest' ultima curva, insieme con quella d' ordine $s_{m+2,2}$ generata da $m+2$ sistemi lineari projettivi di genere m (de' quali i primi m siano i già nominati), costituisce l' intersezione completa di due superficie d' ordini $s_{m,1} + n_{m+1}$, $s_{m,1} + n_{m+2}$ (120); dunque (96) il rango della curva d'ordine $s_{m+2,2}$ sarà

$$(s_{m,1} + s_{m+2,1} - 2)(s_{m+2,2} - s^2_{m,1} + s_{m,2})$$
$$+ 2(s_{m,1} - 1)(s^2_{m,1} - 2s_{m,2}) + (s_{m,1} - 2)\, s_{m,2} + s_{m,3},$$

ossia

$$(s_{m+2,1} - 2)\, s_{m+2,2} + s_{m+2,3}$$

avuto riguardo alle identità superiori (119). Ora la verità dell' ipotesi ammessa è stata dimostrata per $m=1, 2, 3$; dunque:

Il luogo di un punto pel quale passino infiniti gruppi di m superficie corrispondenti (d' ordini $n_1, n_2, ..$) di al-

(*) Ciò si prova come nel caso dei sistemi di terzo genere (112).

trettanti sistemi lineari projettivi di genere m (*) è una curva gobba d' ordine $s^2_{m,1} - s_{m,2}$ e di rango

$$2(s_{m,1} - 1)(s^2_{m,1} - s_{m,2}) - s_{m,1} \cdot s_{m,2} + s_{m,3} \, .$$

Il luogo di un punto pel quale passino $m+2$ superficie corrispondenti (d' ordini $n_1, n_2, ..$) d' altrettanti sistemi lineari projettivi di genere m è una curva gobba d' ordine $s_{m+2,2}$ e di rango $(s_{m+2,1} - 2) \, s_{m+2,2} + s_{m+2,3}$.

122. Siano dati $m-1$ sistemi lineari projettivi (di superficie d' ordini $n_1, n, .. n_{m-1}$) di genere m. In uno di essi prendansi tre sistemi inferiori di genere $m-2$, comprendenti uno stesso sistema minore di genere $m-3$. Ciascuno dei tre sistemi inferiori, insieme coi sistemi corrispondenti negli altri sistemi dati, genererà una superficie d' ordine $s_{m-1,1}$ (118). Queste tre superficie passano simultaneamente per la curva d' ordine $s_{m-1,2}$ generata dagli $m-1$ sistemi minori corrispondenti di genere $m-3$ (119). E siccome il rango di questa curva (121) è

$$(s_{m-1,1} - 2) \, s_{m-1,2} + s_{m-1,3} \, ,$$

così (97) le tre superficie avranno

$$s_{m-1,1}(s^2_{m-1,1} - 2s_{m-1,2}) + s_{m-1,3}$$

punti comuni, all' infuori di quella curva.

Questi punti sono comuni (**) a tutte le analoghe superficie d'ordine $s_{m-1,1}$, che corrispondono ai vari sistemi inferiori di genere $m-2$ contenuti nei sistemi proposti; dunque:

Dati $m-1$ sistemi lineari projettivi (di superficie d' ordini $n_1, n_2, ..$) di genere m, il numero dei punti, ciascun de' quali sia un punto-base comune di $m-1$ reti corrispondenti, è $s_{m-1,1}(s^2_{m-1,1} - 2s_{m-1,2}) + s_{m-1,3}$.

123. Dati $m+3$ sistemi lineari projettivi (di superficie d'ordini $n_1, n_2, .., n_{m+3}$) di genere m, si cerca il luogo di un punto comune ad $m+3$ superficie corrispondenti. I primi m sistemi combinati successivamente col $(m+1)^{mo}$, col $(m+2)^{mo}$, e col $(m+3)^{mo}$ generano (118) tre superficie d' ordini $s_{m,1} + n_{m+1}$, $s_{m,1} + n_{m+2}$, $s_{m,1} + n_{m+3}$, rispettivamente. Queste superficie hanno in comune la curva d' ordine $s^2_{m,1} - s_{m,2}$ e di rango

$$2(s_{m,1} - 1)(s^2_{m,1} - s_{m,2}) - s_{m,1} \cdot s_{m,2} + s_{m,3}$$

generata dai primi m sistemi (121); dunque (97) le tre superficie avranno inoltre un numero di punti comuni eguale a

$$(s_{m,1} + n_{m+1})(s_{m,1} + n_{m+2})(s_{m,1} + n_{m+3})$$

(*) Cioè il luogo di un punto-base comune ad m fasci corrispondenti.

(**) Ciò si dimostra come pei sistemi di terzo genere (111).

$$- (s^2_{m,1} - s_{m,2})(2s_{m,1} + s_{m+3,1} - 2) + 2(s_{m,1} - 1)(s^2_{m,1} - s_{m,2})$$
$$- s_{m,1} \cdot s_{m,2} + s_{m,3}$$

ossia ad $s_{m+3,3}$, in virtù delle identità:

$$s_{m+3,1} = s_{m,1} + n_{m+1} + n_{m+2} + n_{m+3},$$
$$s_{m+3,3} = s_{m,3} + (n_{m+1} + n_{m+2} + n_{m+3})\, s_{m,2}$$
$$+ (n_{m+2}\, n_{m+1} + n_{m+3}\, n_{m+1} + n_{m+1}\, n_{m+2})\, s_{m,1} + n_{m+1}\, n_{m+2}\, n_{m+3}.$$

Dunque:

Il numero dei punti dello spazio pei quali passino $m+3$ superficie corrispondenti (d' ordini $n_1, n_2, ..$) d' altrettanti sistemi lineari projettivi di genere m, è $s_{m+3,3}$ (*).

Complessi simmetrici.

124. Siano dati $m+1$ sistemi lineari projettivi di genere m. Assumendo nel primo sistema $m+1$ superficie, atte ad individuarlo, si consideri ciascuno degli altri sistemi come individuato dalle $m+1$ superficie che corrispondono projettivamente a quelle. Allora una qualunque delle $(m+1)^2$ superficie che per tal modo determinano gli $m+1$ sistemi, potrà essere designata col simbolo P_{rs}, dove l' indice r sia comune a tutte le $m+1$ superficie di uno stesso sistema, e l' indice s sia comune ad $m+1$ superficie corrispondenti.

Ciò premesso, diremo che gli $m+1$ sistemi formano un **complesso simmetrico** quando tutti siano dello stesso ordine n, ed inoltre i simboli P_{rs} e P_{sr} esprimano una sola e medesima superficie.

125. Sia $m=1$, cioè abbiasi il complesso simmetrico

$$\begin{matrix} P_{11}, & P_{12} \\ P_{21}, & P_{22} \end{matrix}$$

costituito da due fasci projettivi $(P_{11}, P_{12}, ..)$, $(P_{21}, P_{22}, ..)$, aventi la superficie comune $P_{12} \equiv P_{21}$, la quale però non corrisponda a sè medesima. Su questa superficie sono situate le curve basi di entrambi i fasci, le quali s' intersecano negli n^3 punti comuni alle tre superficie P_{11}, P_{12}, P_{22}.

La superficie Φ d' ordine $2n$, generata (91) dai due fasci è toccata lungo la curva base del primo fascio dalla superficie P_{11} di esso, che corrisponde alla superficie P_{21} del secondo fascio. In fatti (91) Φ è toccata in un punto qualunque di detta curva dalla superficie del primo fascio corrispondente a

(*) Cfr. Salmon l. c. p. 492-5.

quella del secondo che passa pel punto medesimo; ma P_{21} è una superficie del secondo fascio e contiene intera la curva base del primo, dunque ecc.

Similmente la superficie Φ è toccata lungo la curva base del secondo fascio dalla superficie P_{22} del medesimo, che corrisponde alla superficie P_{12} del primo. Nei punti comuni alle basi dei due fasci, Φ è adunque toccata da entrambe le superficie P_{11} e P_{22}. Ma queste due superficie, essendo date ad arbitrio, non hanno in generale alcun punto di contatto; dunque i punti comuni alle tre superficie P_{11}, P_{12}, P_{22} sono doppi per la superficie Φ. Ossia:

La superficie generata da due fasci projettivi di superficie d' ordine n, formanti un complesso simmetrico, ha n^3 punti doppi.

Le superficie d' ordine n passanti per gli n^3 punti suddetti formano una rete, epperò tutte quelle che passano inoltre per un punto arbitrario (che prenderemo in Φ), costituiscono un fascio. La curva d' ordine n^2, base di questo fascio, avendo così $2n^3+1$ intersezioni comuni con Φ, che è d' ordine $2n$, giace per intero su questa superficie. Dunque *ogni superficie d' ordine n passante per gli n^3 punti doppi di Φ sega questa superficie lungo due curve separate d' ordini n^2, intersecantisi ne' punti suddetti. Per ciascun punto di Φ passa una curva siffatta, che è la base di un fascio di superficie d' ordine n. Due qualunque di tali curve sono situati in una medesima superficie d' ordine n,* epperò non possono avere altri punti comuni, fuori di quegli n^3.

Queste due curve sono le basi di due fasci d' ordine n, fra i quali se può stabilire tale corrispondenza projettiva che la superficie da essi generata sia appunto Φ. In fatti una superficie dell' un fascio, passando per la curva base di esso, sega Φ secondo una nuova curva d' ordine n^2, la quale insieme colla base dell' altro fascio individua la corrispondente superficie di questo. Ma vi è una superficie la quale, contenendo entrambe le curve basi, appartiene all' uno ed all' altro fascio. Come appartenente al primo fascio, essa sega Φ in una nuova curva che coincide colla base del secondo fascio. Dunque *la superficie che in esso secondo fascio le corrisponde segherà Φ lungo due curve coincidenti nella base del secondo fascio medesimo, ossia toccherà Φ lungo questa curva.* Per tal guisa è manifesto che *le curve d' ordine n^2 passanti per gli n^2 punti doppi sono curve (caratteristiche) di contatto tra Φ e certe superficie d' ordine n,* appartenenti alla rete summenzionata. Ossia Φ è l' inviluppo (47) di una serie semplicemente infinita di superficie (due delle quali passano per un punto arbitrario dello spazio), fra le quali si trovano anche P_{11} e P_{22}.

126. Ora sia $m=2$, cioè si consideri il complesso simmetrico

$$\begin{matrix} P_{11}, & P_{12}, & P_{13} \\ P_{21}, & P_{22}, & P_{23} \\ P_{31}, & P_{32}, & P_{33} \end{matrix}$$

costituito da tre reti projettive:

$$(P_{11}, \; P_{12}, \; P_{13}, \ldots),$$
$$(P_{21}, \; P_{22}, \; P_{23}, \ldots),$$
$$(P_{31}, \; P_{32}, \; P_{33}, \ldots)$$

di superficie d' ordine n, ove $P_{23} \equiv P_{32}$, $P_{31} \equiv P_{13}$, $P_{12} \equiv P_{21}$. Sia Ψ la superficie d' ordine $3n$, luogo di un punto nel quale si seghino tre superficie corrispondenti delle tre reti (103); essa può costruirsi nel modo che segue.

I due fasci projettivi $(P_{22}, P_{23}, \ldots)$, $(P_{32}, P_{33}, \ldots)$, che formano un complesso simmetrico, generano (125) una superficie Φ_{11} d' ordine $2n$, la quale è toccata da P_{33} lungo la curva $P_{32} P_{33}$, base del secondo fascio. Analogamente i fasci projettivi $(P_{11}, P_{13}, \ldots)$, $(P_{31}, P_{33}, \ldots)$, che formano pur essi un complesso simmetrico, danno una superficie Φ_{22} d' ordine $2n$, toccata da P_{33} lungo la curva $P_{31} P_{33}$. E i due fasci projettivi $(P_{21}, P_{23}, \ldots)$, $(P_{31}, P_{33}, \ldots)$ ovvero (che è la medesima cosa (*)) i fasci projettivi $(P_{12}, P_{13}, \ldots)$, $(P_{32}, P_{33}, \ldots)$ genereranno una superficie Φ_{12} o Φ_{21} d' ordine $2n$, intersecata da P_{33} lungo le due curve $P_{13} P_{33}$, $P_{23} P_{33}$, e per conseguenza toccata dalla stessa P_{33} ne' punti comuni a queste due curve, cioè nei punti comuni alle tre superficie P_{13}, P_{23}, P_{33} (punti-base della terza rete data).

Le superficie analoghe a Φ_{11}, Φ_{12}, generate per mezzo di fasci che si corrispondono nella seconda e nella terza rete, formano una nuova rete (102); e ciascuna di esse può risguardarsi individuata dal fascio della terza rete che è impiegato per costruirla. E lo stesso valga per le superficie analoghe a Φ_{21}, Φ_{22}, generate per mezzo di fasci corrispondenti nel primo e nel terzo fascio. Donde segue che le reti $(\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots)$, $(\Phi_{21}, \Phi_{22}, \ldots)$ sono projettive, ed in particolare sono projettivi i fasci (Φ_{11}, Φ_{12}), (Φ_{21}, Φ_{22}) che nelle reti stesse si corrispondono.

La superficie Φ_{11} (della rete $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots$) e la superficie Φ_{21} (della rete $\Phi_{21}, \Phi_{22}, \ldots$) corrispondono al medesimo fascio (P_{32}, P_{33}) della terza rete data, e rispettivamente ai fasci (P_{22}, P_{23}), (P_{12}, P_{13}) della seconda e della prima rete: e però quelle superficie contengono, oltre alla curva $P_{32} P_{33}$, la curva d'ordine $3n^2$, luogo dei punti ne' quali si segano tre superficie corrispondenti di quei tre fasci, che sono projettivi. E questa seconda curva appartiene an-

(*) Una superficie d'ordine $2n$, generata (91) per mezzo di due fasci projettivi (U, V), (U', V') dello stesso ordine n, può anche essere dedotta da due fasci projettivi (U, U'), (V, V'), ne' quali due superficie U'', V'' si corrispondano come segue. Presa ad arbitrio la superficie U'' fra quelle che passano per la curva UU', essa incontrerà la superficie $(2n)$ secondo un' altra curva K d'ordine n^2, per la quale e per la base VV' si può far passare una superficie V'' d' ordine n. In fatti K ha n^3 punti comuni colla base VV' (i punti comuni alle superficie U'', V, V'); dunque una superficie d' ordine n, passante per la base VV' e per un punto di K non situato in questa base medesima, avrà n^3+1 punti comuni con K, e però conterrà questa curva per intero.

che alla superficie Ψ, perchè i medesimi tre fasci sono corrispondenti nelle tre reti date.

Analogamente, la superficie Φ_{12} (della rete $\Phi_{11}, \Phi_{12}, ..$) e la superficie Φ_{22} (della rete $\Phi_{21}, \Phi_{22}, ..$) corrispondono allo stesso fascio (P_{31}, P_{33}) della terza rete data e rispettivamente ai fasci (P_{21}, P_{23}), (P_{11}, P_{13}) della seconda e della prima rete; perciò quelle superficie conterranno, oltre alla curva $P_{31}\, P_{33}$, la curva d'ordine $3n^2$, generata dai detti tre fasci, che sono projettivi. La qual curva è anche situata nella superficie Ψ, perchè quei tre fasci sono corrispondenti nelle tre reti date.

Così pure una superficie qualunque Φ_{1r} del fascio (Φ_{11}, Φ_{12}) e la superficie corrispondente Φ_{2r} del fascio projettivo (Φ_{21}, Φ_{22}) (le due superficie corrispondono ad un medesimo fascio della terza rete data) avranno in comune non solo una curva (base di questo fascio) d'ordine n^2, situata su P_{33} e sopra una superficie del fascio (P_{31}, P_{32}), ma anche una curva d'ordine $3n^2$ generata da tre fasci corrispondenti, epperò situata su Ψ. Ne segue che Ψ e P_{33} formano insieme il luogo completo generato dai fasci projettivi (Φ_{11}, Φ_{12}). (Φ_{21}, Φ_{22}).

Siccome questi fasci costituiscono un complesso simmetrico, così (125) la superficie Ψ è toccata da Φ_{11} e da Φ_{22} secondo due curve d'ordine $3n^2$ che giacciono in Φ_{12}; ed i punti doppi di Ψ sono i punti comuni alle tre superficie $\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{12}$. Ora, si è veduto sopra che queste superficie sono toccate simultaneamente da P_{33} negli n^3 punti-base della terza rete data; e ciascuno di questi punti di contatto assorbe (21) quattro punti d'intersezione delle tre superficie Φ; dunque la superficie Ψ ha $(2n)^3 - 4n^3 = 4n^3$ punti doppi, pei quali passano tutte le superficie Φ.

Dalle cose or dette risulta inoltre:

1.° Che Ψ insieme con P_{33}, è l'inviluppo di una serie semplicemente infinita di superficie $\Phi_{11}, \Phi_{22}, ...$ Ogni superficie Φ_{rr} è l'inviluppo di una serie analoga di superficie d'ordine n, come P_{rr}; e viceversa ogni superficie P_{rr} dà luogo ad una serie di superficie Φ_{rr}, il cui inviluppo è costituito da Ψ e dalla P_{rr}. Ogni superficie Φ_{rr} tocca Ψ lungo una curva caratteristica d'ordine $3n^2$, mentre ciascuna P_{rr} tocca Ψ in n^2 punti (punti-base di una rete di superficie P_{rs}).

2.° Che Ψ è anche il luogo dei punti doppi delle superficie Φ_{rr}. In fatti, un punto doppio di Φ_{11} è situato in tutte le superficie del fascio (P_{22}, P_{23}) ed in tutte quelle del fascio (P_{32}, P_{33}); e per esso passerà anche una superficie del fascio (P_{12}, P_{13}). Epperò il punto medesimo, appartenendo a tre superficie corrispondenti dei tre fasci suddetti (che sono contenuti nelle tre reti date), sarà un punto del luogo Ψ.

127. In modo somigliante si può costruire la superficie Ψ luogo di un punto nel quale si seghino tre superficie corrispondenti di tre reti projettive:

$$(P,\ Q,\ R,\ ..),$$
$$(P',\ Q',\ R',\ ..),$$
$$(P'',\ Q'',\ R'',..)$$

d'ordini n, n', n'', le quali non formino un complesso simmetrico (103).

I due fasci projettivi (Q', R'), (Q'', R'') generano una superficie Φ_1 d' ordine $n' + n''$, che è intersecata da R'' secondo le due curve $R''Q''$, $R''R'$.
I due fasci projettivi (Q'', R''), (Q, R) generano una superficie Φ'_1 d' ordine $n'' + n$, che è intersecata da R'' secondo le due curve $R''Q''$, $R''R$.
I due fasci projettivi (P', R'), (P'', R'') generano una superficie Φ_2 d' ordine $n' + n''$, che è intersecata da R'' secondo le due curve $R''P''$, $R''R'$.
E i due fasci projettivi (P'', R''), (P, R) generano una superficie Φ'_2 d'ordine $n'' + n$, che è intersecata da R'' secondo le due curve $R''P''$, $R''R$.
Le superficie Φ_1, Φ_2 determinano un fascio d' ordine $n' + n''$, che è projettivo al fascio (Q'', P''). Se S'' è una superficie qualunque di quest' ultimo fascio, i fasci corrispondenti (epperò projettivi) (S', R'), (S'', R'') genereranno la superficie Φ del fascio (Φ_1, Φ_2) che corrisponde ad S''.
Analogamente, le superficie Φ'_1, Φ'_2 determinano un fascio d'ordine $n'' + n$, pur esso projettivo al fascio (Q'', P''). La superficie Φ' corrispondente ad S'' è generata dai fasci corrispondenti (projettivi) (S'', R''), (S, R).
Le superficie Φ, Φ', oltre alla curva $R''S''$, contengono evidentemente la curva d' ordine $nn' + n'n'' + n''n$, luogo (98) di un punto ove si seghino tre superficie corrispondenti dei tre fasci projettivi (S, R), (S', R'), (S'', R''): curva che è situata sopra Ψ, perchè questi tre fasci sono corrispondenti nelle tre reti date. Dunque: *i fasci projettivi* (Φ_1, Φ_2), (Φ'_1, Φ'_2) *generano un luogo che è composto delle superficie* R'' *e* Ψ.
128. Suppongasi ora $n'' = n' = n$. In questo caso (126, *nota*) una superficie qualunque R_0 del fascio (R', R'') interseca Φ_1 e Φ_2 secondo due curve situate rispettivamente su due superficie Q_0, P_0 appartenenti ai fasci (Q', Q''), (P', P''). Donde segue che le reti projettive

$$\begin{matrix}(P, & Q, & R, ..) \\ (P_0, & Q_0, & R_0, ..) \\ (P'', & Q'', & R'', ..)\end{matrix}$$

daranno origine alle medesime superficie Φ_1, Φ_2, Φ'_1, Φ'_2, e genereranno una superficie d' ordine $3n$, la quale, avendo quattro curve d' ordine $3n^2$ comuni con Ψ, coinciderà assolutamente con questa superficie. Vale a dire:
Se una superficie d' ordine $3n$ *è generata da tre reti projettive*

$$\begin{matrix}(P, & Q, & R, ..) \\ (P', & Q', & R', ..) \\ (P'', & Q'', & R'', ..)\end{matrix}$$

d' ordine n, *si può sostituire ad una qualunque di queste, per es. alla seconda, una nuova rete*

$$(P_0, Q_0, R_0, ..)$$

projettiva alle date, e formata da superficie che appartengano rispettivamente ai fasci (P', P''), (Q', Q''), (R', R''), ...

Analogamente, noi potremo surrogare un' altra delle reti date

$$(P, Q, R, ..)$$

con una nuova rete

$$(P_1, Q_1, R_1, ..)$$

ove le superficie P_1, Q_1, R_1,.. appartengano rispettivamente ai fasci (P_1, P_0), (Q_1, Q_0), (R_1, R_0),.., ossia ciò che è la medesima cosa, alle reti (P, P', P''), (Q, Q', Q''), (R, R', R''). Adunque finalmente si potrà generare la medesima superficie Ψ per mezzo di tre nuove reti

$$(P_1, Q_1, R_1, ..)$$
$$(P_2, Q_2, R_2, ..)$$
$$(P_3, Q_3, R_3, ..)$$

projettive alle date e formate da superficie $P_1\, P_2\, P_3$,.., $Q_1\, Q_2\, Q_3$,.., $R_1\, R_2\, R_3$,.. che appartengano rispettivamente alle reti

$$(P, P', P'', ..)$$
$$(Q, Q', Q'', ..)$$
$$(R, R', R'', ..)$$

Di più: le reti projettive

$$(P, P', P'', P_1, ..)$$
$$(Q, Q', Q'', Q_1, ..)$$
$$(R, R', R'', R_1, ..)$$

generano una superficie d'ordine $3n^2$ la quale contiene le quattro curve $\Phi_1\Phi_2$, $\Phi_1\Phi_1'$, $\Phi'_1\Phi'_2$, $\Phi_2\Phi_2'$ d'ordine $3n^2$, epperò coincide con Ψ. La projettività di queste tre reti si determina assai facilmente. Sia P_1 una superficie qualunque del fascio (P, P'); la corrispondente superficie Q_1 si determinerà in modo che la superficie generata dai fasci projettivi (P, P', P_1), (Q, Q', Q_1) coincida con quella generata dai fasci (P, Q), (P', Q'), pei quali la legge di corrispondenza è data. Così si arriverà per gradi a risolvere il problema più generale: assunta ad arbitrio una superficie nella rete (P, P', P''), trovare le superficie corrispondenti nelle altre due reti (Q, Q', Q''), (R, R', R'').

129. Passiamo a considerare il complesso simmetrico

$$\begin{matrix} P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & P_{14} \\ P_{21}, & P_{22}, & P_{23}, & P_{24} \\ P_{31}, & P_{32}, & P_{33}, & P_{34} \\ P_{41}, & P_{42}, & P_{43}, & P_{44} \end{matrix}$$

costituito da quattro sistemi lineari (di terzo genere) projettivi di superficie d' ordine n, dove $P_{12} \equiv P_{21}$, $P_{13} \equiv P_{31}$, $P_{14} \equiv P_{41}$, $P_{23} \equiv P_{32}$, $P_{24} \equiv P_{42}$, $P_{34} \equiv P_{43}$. La superficie Δ d' ordine $4n$, luogo di un punto comune a quattro superficie corrispondenti (114), può essere costruita nel modo seguente.

Le tre reti projettive (P_{22}, P_{23}, P_{24}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), (P_{42}, P_{43}, P_{44}) danno (126) una superficie Ψ_{11} d' ordine $3n$, che è toccata dalla superficie Φ, generata dai fasci (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}), secondo una curva d' ordine $3n^2$ (situata sulla superficie generata dai fasci (P_{32}, P_{34}), (P_{42}, P_{44}) ovvero dai fasci (P_{23}, P_{24}), (P_{43}, P_{44})), la quale è il luogo di un punto nel quale si seghino tre superficie corrispondenti dei fasci projettivi (P_{23}, P_{24}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}).

In somigliante maniera, le tre reti projettive (P_{11}, P_{13}, P_{14}), (P_{31}, P_{33}, P_{34}), (P_{41}, P_{43}, P_{44}) generano una superficie Ψ_{22} d' ordine $3n$, che è toccata dalla superficie Φ secondo una curva d' ordine $3n^2$ (situata sulla superficie generata dai fasci (P_{13}, P_{14}), (P_{43}, P_{44}) ovvero dai fasci (P_{31}, P_{34}), (P_{41}, P_{44})), la quale è il luogo di un punto comune a tre superficie corrispondenti dei fasci projettivi (P_{13}, P_{14}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}).

E le tre reti projettive (P_{21}, P_{23}, P_{24}), (P_{31}, P_{33}, P_{34}), (P_{41}, P_{43}, P_{44}), o ciò che è la stessa cosa (128) le tre reti projettive (P_{12}, P_{13}, P_{14}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), (P_{42}, P_{43}, P_{44}) generano una superficie Ψ_{12} o Ψ_{21} d'ordine $3n$, che è segata dalla superficie Φ secondo le due curve d' ordine $3n^2$ ora menzionate. Donde segue che i punti comuni a queste due curve, ossia i $4n^3$ punti (100) pei quali passano quattro superficie corrispondenti dei fasci projettivi (P_{13}, P_{14}), (P_{23}, P_{24}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) sono tali che in ciascuno d' essi la superficie Φ tocca tutte e tre le superficie Ψ_{11}, Ψ_{22}, Ψ_{12}.

Le superficie Ψ_{11}, Ψ_{12} determinano un fascio projettivo al fascio (P_{42}, P_{41}). Se P_{4r} è una superficie qualunque di quest'ultimo fascio, e se P_{3r}, P_{2r}, P_{1r} sono le superficie corrispondenti dei fasci (P_{32}, P_{31}), (P_{22}, P_{21}), (P_{12}, P_{11}), la superficie corrispondente Ψ_{1r} del fascio (Ψ_{11}, Ψ_{12}), sarà generata dalle reti projettive (P_{2r}, P_{23}, P_{24}), (P_{3r}, P_{33}, P_{34}), (P_{4r}, P_{43}, P_{44}).

Le superficie Ψ_{21}, Ψ_{22} determinano un altro fascio projettivo allo stesso fascio (P_{42}, P_{41}) anzidetto. La superficie Ψ_{2r} del fascio (Ψ_{21}, Ψ_{22}) che corrisponde a P_{4r}, è generata dalle reti projettive (P_{1r}, P_{13}, P_{14}), (P_{3r}, P_{33}, P_{34}), (P_{4r}, P_{43}, P_{44}).

Le due superficie Ψ_{1r}, Ψ_{2r} d' ordine $3n$ passano insieme per la curva d'ordine $3n^2$ generata dai fasci (P_{r3}, P_{r4}), (P_{33}, P_{34}) e situata sulla superficie Φ, e si segheranno perciò secondo un' altra curva d' ordine $6n^2$, luogo di un punto (105) comune a quattro superficie corrispondenti di quattro reti projettive (P_{1r}, P_{13}, P_{14}), (P_{2r}, P_{23}, P_{24}), (P_{3r}, P_{33}, P_{34}), (P_{4r}, P_{43}, P_{44}). Questa curva appartiene alla superficie Δ, perchè queste tre reti sono corrispondenti nei sistemi dati, dunque i fasci projettivi (Ψ_{11}, Ψ_{12}), (Ψ_{21}, Ψ_{22}) generano un luogo composto della superficie Φ d' ordine $2n$ e della superficie Δ d' ordine $4n$.

Per conseguenza (125) i punti doppi del luogo composto saranno le intersezioni delle tre superficie Ψ_{11}, Ψ_{22}, Ψ_{12}. Ma queste tre superficie hanno $4n^3$ punti di contatto, i quali equivalgono a $4 \cdot 4n^3$ intersezioni: dunque il nu-

mero de' punti doppi è $(3n)^3 - 4 \cdot 4n^3 = 11n^3$. Ora i punti doppi di Φ sono le n^3 intersezioni delle superficie P_{33}, P_{44}, P_{34}; perciò la superficie Δ ha $10n^3$ punti doppi situati sopra tutte le superficie analoghe a Ψ_{11}, Ψ_{22}, Ψ_{12},...

Siccome la superficie Δ è generata (insieme con Φ) per mezzo di due fasci projettivi costituenti un complesso simmetrico, così essa sarà toccata dalle superficie Ψ_{11}, Ψ_{22} e da tutte le analoghe secondo altrettante curve caratteristiche d' ordine $6n^2$; e le curve di contatto di due superficie Ψ_{11}, Ψ_{22} saranno situate insieme in una medesima superficie Ψ_{12}.

Inoltre Δ può definirsi come il luogo dei punti doppi delle superficie Ψ_{11}, Ψ_{22},... In fatti i punti doppi di Ψ_{11} sono (126) quelli comuni ad infinite superficie, come p. e. quelle generate dalle coppie di fasci projettivi:

$$\begin{array}{lll} l) & (P_{33}, P_{34}), & (P_{43}, P_{44}), \\ m) & (P_{32}, P_{33}), & (P_{42}, P_{43}), \\ h) & (P_{22}, P_{24}), & (P_{42}, P_{44}), \\ k) & (P_{22}, P_{23}), & (P_{42}, P_{43}), \end{array}$$

eccettuati però i punti comuni alle superficie P_{42}, P_{43}, P_{44}. Dunque, se x è uno di quei punti doppi, per x passano due superficie corrispondenti A_3, A_4 dei fasci l), due superficie corrispondenti B_3, B_4 dei fasci m), due superficie corrispondenti C_2, C_4 dei fasci h) e due superficie corrispondenti B_2, B_4 dei fasci k). I fasci della colonna a destra sono compresi in una medesima rete (P_{42}, P_{43}, P_{44}), e le superficie di una rete che passano per un medesimo punto x (che non è un punto-base della rete) costituiscono un fascio: dunque le superficie A_4, B_4, C_4 appartengono ad uno stesso fascio, contenuto nel quarto dei sistemi dati. Ed ai fasci che a questo corrispondono nel secondo e nel terzo sistema dato apparterranno rispettivamente le coppie di superficie (B_2, C_2), (A_3, B_3). Il punto x, comune a tutte queste superficie, è per conseguenza un punto-base comune a tre fasci corrispondenti in tre dei sistemi dati (il secondo, il terzo, il quarto). Per x passerà anche una superficie del fascio che a quelli corrisponde nel primo sistema dato. Dunque x è situato in quattro superficie corrispondenti dei quattro sistemi dati, ossia x è un punto del luogo Δ, c.d.d.

130. Consideriamo da ultimo la superficie Δ d' ordine mn, luogo di un punto pel quale passino m superficie corrispondenti di m sistemi lineari projettivi di genere $m-1$ e d' ordine n. Il complesso degli m sistemi suppongasi da prima non simmetrico, e le superficie che individuano i sistemi medesimi costuiscano la matrice quadrata

$$\begin{array}{cccc} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mm} \end{array}$$

che ha m linee ed m colonne. Le superficie di una stessa linea appartengono ad un medesimo sistema, mentre le superficie di una colonna sono corrispondenti.

Omettendo nella matrice data l' r^{ma} linea e l' s^{ma} colonna, si ha un complesso minore di $m-1$ sistemi minori projettivi di genere $m-2$; chiameremo Δ_{rs} la superficie d' ordine $(m-1)n$ da essi generata (118).

Omettendo l' s^{ma} colonna, si ha un complesso di m sistemi minori projettivi di genere $m-2$; sia K_s la curva d' ordine $\frac{m(m-1)n^2}{2}$ da essi generata (121): curva che è evidentemente situata su Δ e sopra tutte le superficie $\Delta_{1s}, \Delta_{2s}, .., \Delta_{ms}$.

Omettendo nella medesima matrice l' r^{ma} linea, rimangono $m-1$ sistemi projettivi di genere $m-1$; sia L_r la curva d' ordine

$$\left\{ (m-1)^2 - \frac{(m-1)(m-2)}{2} \right\} n^2 = \frac{m(m-1)}{2} n^2$$

da essi generata (121). Questa curva è situata sopra Δ e sopra tutte le superficie $\Delta_{r1}, \Delta_{r2}, .., \Delta_{rm}$.

Se ora si scambiano nella matrice data le linee colle colonne, onde si abbia la nuova matrice

$$\begin{matrix} P_{11} & P_{21} & \cdots & P_{m1} \\ P_{12} & P_{22} & \cdots & P_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ P_{1m} & P_{2m} & \cdots & P_{mm}, \end{matrix}$$

questa rappresenterà un nuovo complesso di m sistemi lineari projettivi di genere $m-1$ (*). Sia ∇ la superficie d' ordine mn generata da questi sistemi; e indichiamo con ∇_{rs} la superficie d' ordine $(m-1)n$ dedotta dalla matrice inversa nello stesso modo che Δ_{rs} è stata ricavata dalla matrice primitiva; e con H_r, M_s le curve analoghe a K_s, L_r.

Se si suppone che ∇_{rs} e Δ_{rs} siano una sola e medesima superficie, anche la curva K_s comune alle superficie $\Delta_{1s}, \Delta_{2s}, .., \Delta_{ms}$ coinciderà colla curva M_s comune alle superficie $\nabla_{s1}, \nabla_{s2}, .., \nabla_{sm}$; e parimente L_r coinciderà con H_r. Dunque le superficie Δ e ∇, avendo in comune tutte le curve K, L, coincidono in una superficie uni-

(*) Circa la determinazione della corrispondenza projettiva ne' nuovi sistemi, veggasi la chiusa del n.° 128.

ca incontrata da Δ_{rs} secondo due curve K_s, H_r d'ordine $\frac{m(m-1)}{2}n^2$, l'una situata su tutte le superficie Δ_{1s}, Δ_{2s},.., e l' altra su tutte le superficie Δ_{r1}, Δ_{r2},... Ma l' ipotesi ammessa si è verificata per $m=2$ ed $m=3$ (126, 128); dunque ecc.

Se nella matrice data si omettono l' r^{ma} e l' s^{ma} colonna, si hanno m sistemi minori projettivi di genere $m-3$, e sarà $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}n^3$ il numero de' punti da essi generati (123). Questi punti sono evidentemente comuni alle curve K_s, H_r; dunque nei punti medesimi la superficie Δ è toccata dalla superficie Δ_{rs}.

131. Ora il complesso rappresentato dalla matrice data sia simmetrico, cioè sia $P_{rs} \equiv P_{sr}$, onde anche $\Delta_{rs} \equiv \Delta_{sr}$, $H_r \equiv K_r$. Allora le due curve secondo le quali la superficie Δ_{rr} sega Δ coincidono in una curva unica, cioè Δ_{rr} tocca Δ lungo una curva K_r d' ordine $\frac{m(m-1)}{2}n^2$, comune a tutte le superficie Δ_{1r}, Δ_{2r},.., Δ_{mr}, epperò Δ_{rs} sega Δ secondo due curve K_r, K_s, che sono le curve (caratteristiche) di contatto fra Δ e le due superficie Δ_{rr}, Δ_{ss}.

Le due superficie Δ_{rr}, Δ_{rs}, oltre alla curva K_r comune con Δ, s' intersecano secondo un' altra curva d' ordine $\frac{(m-1)(m-2)}{2}n^2$, generata dagli $m-1$ sistemi minori projettivi di genere $m-3$, che si ottengono togliendo dalla matrice data l' r^{ma} linea e le colonne r^{ma} ed s^{ma}. Questa curva è evidentemente situata anche nella superficie Ξ d'ordine $(m-2)n$ generata dagli $m-2$ sistemi minori projettivi di genere $m-3$, che risultano omettendo le linee r^{ma} ed s^{ma} e le colonne r^{ma} ed s^{ma} della matrice proposta.

La medesima proprietà si verifica per ogni coppia di superficie corrispondenti dei fasci $(\Delta_{rr}, \Delta_{rs})$, $(\Delta_{sr}, \Delta_{ss})$ i quali sono projettivi, come projettivi (129) entrambi al fascio (P_{ms}, P_{mr}). Dunque i due fasci anzidetti genereranno un luogo composto delle due superficie Ξ e Δ. E siccome gli stessi due fasci formano un complesso simmetrico, così (125) i punti doppi del luogo composto saranno le intersezioni comuni delle tre superficie Δ_{rr}, Δ_{ss}, Δ_{rs}.

Ora Ξ è rispetto a ciascuna delle Δ_{rr}, Δ_{ss} ciò che queste sono rispetto a Δ; dunque Ξ tocca Δ_{rr}, Δ_{ss} secondo due curve d'ordine $\frac{(m-1)(m-2)}{2}n^3$, generate dai complessi di sistemi minori che si ottengono dalla matrice data omettendo per entrambe le linee r^{ma}, s^{ma} e rispettivamente le colonne r^{ma}, s^{ma}. E queste medesime due curve costituiscono anche l' intersezione di Ξ con Δ_{rs}, come si fa manifesto applicando a queste due superficie il discorso fatto superiormente (130) per Δ_{rs} e Δ. Dunque le tre superficie Δ_{rr}, Δ_{ss}, Δ_{rs} sono toccate da una medesima superficie Ξ, epperò si toccano fra loro, negli $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}n^3$ punti comuni a quelle curve, cioè nei punti generati dai

sistemi che dà la matrice proposta, omettendo le linee r^{ma} ed s^{ma}. Ciascuno di questi punti di contatto conta come quattro intersezioni; e però il numero complessivo dei punti doppi di Δ e di Ξ sarà

$$\left\{ (m-1)^3 - 4 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3} \right\} n^3 =$$

$$\frac{m(m^2-1)}{2\,.\,3} n^3 + \frac{(m-2)\left[(m-2)^2-1\right]}{2\,.\,3} n^3;$$

dunque: la superficie Δ generata da m sistemi lineari projettivi di genere $m-1$ e d'ordine n, formanti un complesso simmetrico, ha $\frac{m(m^2-1)}{2\,.\,3} n^3$ punti doppi (*).

Si proverebbe poi come ne' casi di $m=3$ ed $m=4$ (126, 129) che Δ è anche il luogo dei punti doppi delle superficie analoghe a Δ_{rr}.

Qui finisco i *Preliminari*, quantunque il disegno primitivo fosse diverso da quello che si è venuto attuando. Il presente lavoro può stare da sè, come contenente il materiale elementare, che sarà adoperato più tardi in altro scritto sulla teoria delle superficie. Nel quale mi propongo di sviluppare geometricamente ciò che risguarda la superficie reciproca di una data, la superficie Hessiana (Jacobiana delle prime polari (**)) ed altre superficie intimamente connesse colla superficie fondamentale (***). Inoltre si applicheranno le teorie generali a certe classi di superficie, particolarmente a quelle generate dal movimento di una linea retta.

Correzione. A pag. 38, lin 4 e 5, in luogo di « ordine » leggasi « genere »

(*) Salmon l. c. p. 496.
(**) *Introd.* 90.
(***) Una parte di queste proprietà, insieme colla loro applicazione alle superficie di terz'ordine, trovasi già nel *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, che ottenne (1866) dalla R. Accademia delle scienze di Berlino una metà del premio fondato da Steiner, e che ora si sta stampando nel Giornale Crelle-Borchardt (t. 68).

SOMMARIO

PARTE PRIMA

PARTE SECONDA

(*) Per una svista la numerazione dei paragrafi salta dal 57 al 61.

Avvertenza. I primi sei fogli di quest' opuscolo sono estratti dal t. 6 (pag. 91-136) delle Memorie dell' Accademia di Bologna (seconda serie), e vennero alla luce nel novembre 1866. I fogli seguenti sono estratti dal t. 7 (pag. 29-78) delle medesime Memorie, e si sono pubblicati nell' ottobre 1867.